Equations différentielles stochastiques rétrogrades à croissance quadratique et applications

Marie Amélie Morlais

N° d'Ordre : 3555

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Marie-Amélie MORLAIS

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades à croissance quadratique et applications.

Soutenue le 12 Octobre 2007 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Mme	Monique JEANBLANC	Rapporteur
M.	Martin SCHWEIZER	Rapporteur
M.	Rainer BUCKDAHN	Examinateur
M.	Arnaud DEBUSSCHE	Examinateur
M.	Ying HU	Directeur de thèse
M.	Nizar TOUZI	Examinateur

Table des matières

Première partie

Introduction générale

0.1 Objectifs et motivations

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (notées EDSR) dites à croissance quadratique et une motivation particulière de cette étude se trouve dans le champ des applications : nous donnerons des applications de l'étude théorique de ces objets en mathématiques financières et, plus particulièrement, à un problème d'optimisation de portefeuille.

Rappelons ici brièvement dans quel contexte la notion d'EDSR a été introduite. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, sur lequel est construit un mouvement brownien W (d dimensionnel) Sur cet espace, une EDSR à horizon déterministe T est définie par une équation dont la forme générique est la suivante

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

et dont les paramètres sont la condition terminale $Y_T = \xi$ et un générateur $f = f(s, y, z)$, qui est une fonction (éventuellement aléatoire). Originairement introduite dans [BIS] puis dans le cas général dans [PAR90], la théorie des EDSR s'est beaucoup développée depuis : de nombreux raffinements dans les hypothèses ont permis d'élargir la classe d'EDSR admettant des solutions. Le cadre classique est celui des EDSR lipschitziennes au sens où le générateur de l'EDSR est supposé lipschitzien (par rapport aux variables y et z). Les objectifs principaux de cette thèse sont :

- d'une part, l'étude d'une classe spécifique d'EDSR (pour laquelle on va chercher à raffiner progressivement les hypothèses sur le générateur) et avec l'objectif complémentaire de généraliser le cadre brownien,
- d'autre part, l'étude détaillée d'une application en mathématiques financières, pour deux modèles de marché financier.

0.1.1 Quelques champs d'application

Avant de procéder à des rappels précis concernant les définitions, hypothèses et résultats théoriques déjà établis sur les EDSR, on se propose ici de présenter quelques exemples bien connus d'applications de la théorie des EDSR. Un des intérêts de l'étude des EDSR est le rapprochement fructueux avec un autre domaine des Mathématiques : il existe ainsi un lien entre un certain type d'EDSR (nommées EDSR markoviennes) et des EDP dites semilinéaires (ce lien a été étudié dans [PAR92] et généralisé dans le cadre d'EDSR quadratique dans [KOB]). Plus précisément, on peut relier, via des formules dites de Feynman Kac, la solution de telles EDSR à la solution d'EDP semilinéaires et, ce qui est d'autant plus intéressant, est la possibilité d'appliquer des méthodes provenant à l'origine des EDP pour résoudre

les EDSR associées. On souligne que, dans le cas d'une EDSR quadratique, i.e. lorsque le générateur $f := f(s,y,z)$ a une croissance de l'ordre de $|z|^2$ alors considérant l'EDP associée (dont la solution u s'exprime en fonction de la solution de l'EDSR), la non linéarité contient un terme de l'ordre de $|\nabla u|^2$: ce type de non linéarité est difficile à traiter et ceci est une des raisons motivant l'étude des EDSR à croissance quadratique, pour lesquelles on dispose d'outils spécifiques.
Un second exemple d'application se trouve dans le domaine du contrôle stochastique. Considérons ainsi le problème de contrôle optimal (étudié dans l'article [FUH]) consistant à minimiser la fonction de coût suivante :

$$J = \inf_{u_t(\omega)\in K} \left(\mathbb{E}\big(\int_0^T g(t, X_t, u_t)dt + \phi(X_T) \big) \right),$$

où K désigne un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$ dans lequel tout processus de contrôle noté u prend ses valeurs et, où on suppose que X est le processus défini par l'EDS suivante :

$$(1) \begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\big[dW_t + r(t, X_t, u_t)dt\big], \\ X_0 = x, \end{cases}$$

équation dans laquelle le processus u désigne le contrôle. Afin de résoudre ce problème, on introduit alors la fonction ψ (représentant le hamiltonien du système) comme suit :

$$\psi(t, x, z) = \inf_{u_t(\omega)\in K} (g(t, x, u) + z \cdot r(t, x, u)).$$

La réponse au problème de contrôle s'exprime en termes de la solution (Y, Z) de l'EDSR suivante :

$$(2) \begin{cases} dY_t = -\psi(t, X_t, Z_t)dt + Z_t dW_t \\ Y_T = \phi(X_T) \end{cases}$$

et elle est donnée par l'expression : $J = Y_0$. Pour résoudre ce problème de contrôle, il faut établir l'existence d'une solution au système formé des deux équations (1) et (2) : dans ce système qui est appelé système forward backward, le processus X solution de l'équation (1) de type forward intervient dans la seconde équation de type backward (ce type de système est étudié au chapitre II de [ELK97b]). On note que, sous l'hypothèse que la fonction g intervenant dans l'expression du coût est à croissance quadratique en x et u, il est simple de montrer que le hamiltonien ψ est contrôlé par un terme quadratique en z et, de ce fait, l'EDSR qui est à résoudre est une fois encore de type quadratique. D'autre part, l'existence d'un contrôle optimal u^* est justifiée par la proposition 5.2 de l'article [FUH].

Dans certains problèmes issus de la finance, on est amené à considérer une classe particulière d'EDSR, à savoir les EDSR à croissance quadratique (par rapport à la variable z) : ceci est une autre raison motivant l'étude théorique de ces objets. Dans cette thèse, on s'intéressera ainsi à l'extension des résultats précédemment obtenus dans [KOB] à une classe plus générale d'EDSR.

0.1.2 Rappels préliminaires

On commence par donner quelques uns des résultats majeurs auxquels nous ferons référence par la suite. Communément, on se place sur un espace probabilisé noté $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on suppose être défini un mouvement Brownien standard W (d-dimensionnel $d \geq 1$) dont la filtration naturelle $\mathcal{F}$ satisfait les conditions "usuelles" de complétude et de continuité à droite. Dans toute la suite et sauf mention particulière, on se donne T un temps déterministe (appelé aussi l'horizon) et l'ensemble des processus construits sont adaptés à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et ne sont alors considérés que sur $[0, T]$. Dans ce contexte, on cherche à résoudre l'EDSR suivante (d'horizon déterministe T)

$$\text{(Eq0.1)} \quad Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

dont les paramètres sont le générateur f, qui est une fonction $(s, \omega, y, z) \to f(s, \omega, y, z)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k\times d})$, et la condition terminale ξ, qui est une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable. Classiquement, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ désigne l'ensemble des boréliens de l'espace $\mathbb{R}^k$ et $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des prévisibles de $(\Omega \times [0, T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T]))$. On rappelle que la dimension de l'EDSR est donnée par la dimension du processus solution Y On considère le cadre classique où une solution est définie sur $S^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Ces espaces sont définis ci-dessous par

- $S^2(\mathbb{R}^k) = \{Y,$ processus adaptés càdlàg, tels que :$\}$ $\{ \mathbb{E}\big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s|)^2\big) < \infty\}$,
- $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{k\times d}) = \{Z,$ processus prévisibles ($k \times d$ -dimensionnels) et t.q : $\mathbb{E}(\int_0^T |Z_s|^2 ds) < \infty\}$,

et on note $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{k\times d})$ l'espace défini comme suit :
$\mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{k\times d}) := Z,$ processus prévisibles ($k \times d$ -dimensionnels) et t.q : $\{\int_0^T |Z_s|^2 ds < \infty$ -p.s.$\}$.
La solution d'une telle EDSR est un couple (Y, Z) de processus appartenant à $S^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ et satisfaisant les conditions minimales suivantes : $s \to f(s, Y_s, Z_s)$ appartient à $L^1([0, T])$, $\mathbb{P}$-p.s., les processus sont adaptés à la filtration $\mathcal{F}$ et satisfont l'équation (Eq0.1). Une particularité remarquable des EDSR est que la donnée d'une équation suffit à déterminer, sous de

bonnes conditions sur les paramètres (celles-ci sont précisées au théorème 0.1 ci-dessous), un couple de processus solution. Sous ces hypothèses, le processus Z apparaissant dans l'intégrale par rapport au mouvement brownien W est alors localement de carré intégrable, dès lors qu'on impose le caractère adapté des solutions. L'exemple le plus simple pour lequel on obtient une solution (Y, Z) à l'EDSR de paramètres (f, ξ) correspond au cas où le générateur est identiquement nul et où la condition terminale ξ est de carré intégrable. Dès lors, l'unique solution de l'équation

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,$$

est donnée par $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ et le théorème de représentation des martingales browniennes donne l'existence (et l'unicité à indistinguabilité près) d'un processus Z satisfaisant $Z \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ (i.e. de carré intégrable) tel que

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

On rappelle les premiers résultats concernant l'étude des EDSR (que l'on supposera k dimensionnelles avec $k \geq 1$). L'un de premiers résultats, obtenu dans [PAR90], est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Sous les hypothèses suivantes sur les paramètres f et ξ associés à l'EDSR (Eq0.1)*

- *(A) Le générateur f satisfait la condition suivante dite de Lipschitz en les variables y et z*

$$\begin{aligned} &\exists\, \lambda > 0,\ \forall\, t,\ y,\ y',\ z,\ z', \\ &\qquad |f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda\big(|y - y'| + |z - z'|\big). \qquad (L) \end{aligned}$$

- *(B) Les paramètres f et ξ satisfont la condition d'intégrabilité suivante*

$$\mathbb{E}\big(|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr\big) < \infty.$$

l'EDSR (Eq0.1) possède une et une seule solution dans l'espace $S^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$.

Sous de bonnes hypothèses d'intégrabilité sur les paramètres de l'EDSR (à savoir (f, ξ)), il est encore possible de construire des solutions dans les espaces $S^p(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^{k\times d})$, qui sont ceux définis comme les espaces munis des normes suivantes :

- $|Y|_{S^p} = \mathbb{E}\big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^p\big)^{\frac{1}{p}}$,
- $|Z|_{\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^{k\times d})} = \mathbb{E}\big((\int_0^T |Z_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}}\big)^{1\wedge\frac{1}{p}}$.

Ces espaces sont, en particulier, métriques complets, lorsque $0 < p < 1$, et de Banach (pour $p \geq 1$). (pour des résultats précis, on renvoie à [PAR99]). Un nouveau résultat d'existence et d'unicité est obtenu sous une nouvelle hypothèse (M) dite de monotonie sur le générateur (hypothèse remplaçant (L) et reliée aux accroissements en y). Cette hypothèse dit que f est lipschitzien par rapport à z et monotone par rapport à y, au sens suivant :

$$(M)\begin{cases} \exists\, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\, t, y, y^{'}, z \qquad (y-y^{'})(f(t,y,z)-f(t,y^{'},z)) \leq \mu |y-y^{'}|^2. \\ \\ \exists\, K > 0,\ \ \forall\, t,\ y, z, z^{'}, \quad |f(t,y,z)-f(t,y,z^{'})| \leq K|z-z^{'}|. \end{cases}$$

Une étape essentielle dans l'établissement de ces résultats est l'existence d'estimations a priori précises des normes de ces solutions.

Lemme 0.1 *Supposons que les paramètres $(f,\ \xi)$ de l'EDSR (Eq0.1) satisfont les hypothèses (A) et (B) du théorème 0.1 alors pour toute solution (Y, Z) de l'EDSR (dans l'espace $S^2(\mathbb{R}^k) \times H^2(\mathbb{R}^d)$), il existe une constante universelle notée C_u telle que pour β assez grand on ait :*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t}|Z_t|^2 dt\big) \\ &\leq C_u \mathbb{E}\big(e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta T}|f(t,0,0)|^2 dt\big). \end{aligned}$$

Ces estimations a priori sont également très utiles pour l'étude des EDSR quadratiques. D'autre part, pour le cas particulier des EDSR unidimensionnelles ($k = 1$), on dispose de résultats de comparaison. Enfin, on rappelle que sous de bonnes conditions d'intégrabilité sur les paramètres de l'EDSR, on obtient le même genre d'estimations a priori en cherchant des solutions (Y, Z) définies sur les espaces $S^p(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^{k\times d})$ $(p > 1)$.

Pour conclure ces rappels préliminaires, on mentionne les résultats obtenus dans [ROY06], dans le cadre des EDSR à sauts unidimensionnelles (en horizon déterministe T, $T > 0$), auxquelles nous ferons référence dans la seconde partie de la thèse. Dans ce cadre, les EDSR considérées sont définies sur un espace dit de Wiener-Poisson, espace qui est muni d'un mouvement Brownien W et d'une mesure aléatoire de Poisson $\tilde{N}_p(ds, dx)$ indépendante du mouvement brownien. On note $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ces deux processus indépendants (complétée par la famille des négligeables) et satisfaisant ainsi les hypothèses usuelles. La forme des EDSR (unidimensionnelles) sur cet espace filtré est donnée par :

$$\text{(Eq0.2)} \qquad \begin{aligned} Y_t = \xi + &\int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds \\ &- \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x) \tilde{N}_p(dx, ds). \end{aligned}$$

On ne considère que des EDSR unidimensionnelles, car ce cadre particulier est requis pour établir le résultat de comparaison, qui est un outil essentiel dans l'étude des EDSR à croissance quadratique et dont on donne un énoncé dans cette section au théorème 0.3. On reprend les notations du chapitre 2 de [IKE] en appelant encore $n(dx)$ (ou plus simplement n) la mesure d'intensité associée à la mesure compensée de Poisson $\tilde{N}_p$. On rappelle qu'une mesure aléatoire de Poisson N_p est, en particulier, une mesure de comptage associée à un processus ponctuel $p : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On donne un exemple où il est simple de définir le processus ponctuel p ainsi que l'ensemble aléatoire D_p associé qui représente l'ensemble des instants de sauts de p. Soit X un processus de Lévy défini sur un espace filtré standard et à valeurs d dimensionnelles, i.e. le processus X est càdlag adapté et à accroissements indépendants et stationnaires. On lui associe la mesure de ses sauts (qui est notée N_p) qui est la mesure de comptage suivante

$$\forall\, t \in [0,T],\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ N_p([0,t] \times A) = \sum_{s \leq t, \Delta X_s \in A} \mathbf{1}_{\{\ \Delta X_s \neq 0\}},$$

et où l'ensemble D_p défini par $D_p := \{s, X_s \neq X_{s-}\}$ représente l'ensemble aléatoire des sauts (cet exemple est donné au chapitre 2 section 4 de [IKE]). Le caractère croissant de la mesure de comptage permet de donner un sens à l'intégrale suivante

$$\forall\, t, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \phi_s(x) N_p(ds, dx) := \sum_{s \leq t} \phi_s(x) \mathbf{1}_{(s,x) \in D_p},$$

dès que : $\sum_{s \leq t} |\phi_s(x)| \mathbf{1}_{(s,x) \in D_p} < \infty$. ($\mathbb{P}$-p.s.) Une autre définition de l'intégrale existe et cette dernière nécessite d'introduire une nouvelle notation. On désigne ainsi par $\hat{N}_p$ le compensateur prévisible associé à la mesure N_p et on appelle $\tilde{N}_p$ la mesure (compensée) de martingale définie comme suit

$$\tilde{N}_p(ds, dx) = N_p(ds, dx) - \hat{N}_p(ds, dx).$$

On peut donner un sens en tant que martingale de carré localement intégrable à l'intégrale stochastique suivante

$$\int_0^{\cdot} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \phi_s(x) \tilde{N}_p(ds, dx),$$

pour tout processus ϕ prévisible satisfaisant la condition :

$$\Big(\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times [0,T]} |\phi_s(x)|^2 \hat{N}_p(ds, dx) \Big) < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Pour une mesure aléatoire de Poisson, le compensateur est déterministe et, dans toute notre étude, on suppose qu'il existe une mesure n (dite de Lévy) telle que $\hat{N}_p(ds, dx) = n(dx)ds$. D'autre part, pour toute EDSR dont la forme est donnée par (Eq0.2) et sous des hypothèses qui sont précisées dans l'énoncé du théorème 0.2 (analogues à celles du théorème 0.1), une solution est un triplet de processus (Y, Z, U) appartenant à $S^2(\mathbb{R}) \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$. On précise ci-dessous la définition des espaces hilbertiens $L^2(\tilde{N}_p)$ et $L^2(W)$: $L^2(W) = \{Z,\ Z$ processus prévisibles et t.q.

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,T]} |Z_s|^2 ds\right) < \infty\}$$

$L^2(\tilde{N}_p) = \{U,\ $ processus $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mesurables et satisfaisant :

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx)ds\right) < \infty\},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des évènements prévisibles sur $\Omega \times [0, T]$. Le triplet (Y, Z, U) est tel que Y est un processus càdlag et Z et U sont des processus prévisibles. Dans la suite, on note, par souci de simplification, $L^2(n)$ au lieu de : $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, n(dx))$. On introduit alors la notation $\mathcal{F}$ pour désigner la filtration naturelle engendrée par le brownien W et la mesure aléatoire de Poisson N_p et complétée. De façon analogue au cas brownien, l'espace de Wiener-Poisson possède la propriété de représentation prévisible des martingales, à savoir que toutes les martingales K de carré (localement) intégrable s'écrivent sous la forme suivante :

$$K_t = K_0 + \int_0^t L_s dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} M_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx),$$

où les processus L et M sont des processus prévisibles et au minimum de carré (localement) intégrable. Dans le cadre où la filtration est seulement continue à droite, les notions de processus prévisibles et adaptés ne coincident pas nécessairement. En particulier et dans toute notre étude, les processus Z et U apparaissant dans l'EDSR (Eq0.2) sont pris prévisibles et de carré (localement) intégrable de sorte que les deux intégrales stochastiques associées sont des martingales de carré (localement) intégrable. Dans ce cadre, les deux résultats suivants ont été établis dans [ROY03] :

- Des résultats d'existence et d'unicité, sous l'hypothèse que le générateur est lipschitzien par rapport à la variable z (et monotone par rapport à y).

- Un résultat de comparaison dans le cadre unidimensionnel.

On rappelle les énoncés de ces deux principaux résultats, auxquels nous ferons appel lors de l'étude théorique d'EDSR quadratiques (dans le contexte d'une filtration discontinue particulière associée à l'espace de Wiener-Poisson qui a été présenté ci-dessus).

Théorème 0.2 *On considère l'EDSR à sauts unidimensionnelle suivante*

$$Y_t = \eta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(dx, ds).$$

On suppose que η appartient à $L^2(\mathcal{F}_T)$ (i.e. η est une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable) et que le générateur f satisfait l'hypothèse notée (H_{ex}) constituée des trois points suivants :

1. *f est lipschitzien par rapport aux variables z et u, au sens suivant :*

$$\exists\, K \geq 0,\ \forall t \in [0,T], \forall\, y \in \mathbb{R},\ z, z^{'} \in \mathbb{R}^d,\ u, u^{'} \in L^2(n)$$

$$|f(t,y,z,u) - f(t,y,z^{'},u^{'})| \leq K\big(|z - z^{'}| + \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(u-u^{'})(x)|^2 n(dx)\right)^{\frac{1}{2}}\big).$$

2. *f est continue par rapport à y et il existe un processus ϕ prévisible et à valeurs positives tel que : $\mathbb{E}(\int_0^T \phi_s^2 ds) < +\infty$ et :*

$$|f(t,y,z,u)| \leq \phi_t + K\big(|y| + |z| + \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |u(x)|^2 n(dx)\right)^{\frac{1}{2}}\big).$$

3. *f est monotone par rapport à y, au sens suivant :*

$$\begin{array}{l} \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, t,\ \forall\, y, y^{'} \in \mathbb{R},\ \forall\, z, u \in \mathbb{R}^d \times L^2(n) \\ (y - y^{'})(f(t,y,z,u) - f(t,y^{'},z,u)) \leq \alpha |y - y^{'}|^2 \end{array}$$

Sous ces conditions, il existe une solution (Y, Z, U) qui est à valeurs dans $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\tilde{N}_p)$ et qui, de plus, est unique dans cet espace.

Dans le cadre d'une filtration continue à droite, le générateur f est mesurable respectivement à $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{B}(L^2(n(dx)))$ ($\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des éléments prévisibles de $\Omega \times [0,T]$). On introduit ci-dessous une nouvelle hypothèse notée (H_{comp}) concernant le générateur, avant d'énoncer le résultat de comparaison établi dans [ROY06].

$$(H_{\text{comp}}) \begin{cases} (i) \quad \mathbb{E}\displaystyle\int_0^T |f(s,0,0,0)|^2 ds) < \infty. \\ (ii) \quad f \text{ est lipschitzien respectivement par rapport à } y \text{ et } z. \\ (iii) \quad f \text{ satisfait l'hypothèse } (A_\gamma) \text{ donnée ci-dessous.} \end{cases}$$

Cette dernière hypothèse (A_γ) est définie par les conditions :

$$(A_\gamma)\begin{cases} \exists\, C_1,\ C_2 \text{ t.q. } -1 < C_1 \leq 0 \text{ et } C_2 \geq 0,\\ \forall\, y \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{R}^d,\ \forall u, u^{'} \in L^2(n)\\ f(t,y,z,u) - f(t,y,z,u^{'}) \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma_t^{y,z,u,u^{'}}(u-u^{'})(x)n(dx),\\ \text{où } \gamma^{y,z,u,u^{'}} : \Omega \times [0,T] \to L^2(n) \text{ est t.q. :}\\ \text{il est mesurable par rapport à chacune de ces variables et}\\ C_1(1 \wedge |x|) \leq \gamma_t(x) \leq C_2(1 \wedge |x|) \end{cases}$$

La notation $\gamma^{y,z,u,u^{'}}$ signifie que le processus prévisible γ peut dépendre de tous les paramètres indiqués. Ceci étant posé, on énonce alors le résultat de comparaison suivant (la référence est [ROY06]) :

Théorème 0.3 *On considère deux EDSR avec sauts de paramètres respectifs (f_1, η_1) et (f_2, η_2), où les conditions terminales η_1 et η_2 appartiennent à $L^2(\mathcal{F}_T)$ et telles que f_1 satisfait (H_{ex}), f_2 satisfait (H_{comp}). On suppose, de plus, que (Y^1, Z^1, U^1) et (Y^2, Z^2, U^2) sont des solutions respectives des EDSR de paramètres (f_1, η_1) et (f_2, η_2) et satisfont :*

$$\big(\eta_1 \leq \eta_2 \quad \textit{et} \quad \forall\, s,\ f_1(s, Y_s^1, Z_s^1, U_s^1) \leq f_2(s, Y_s^1, Z_s^1, U_s^1)\big)\ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

On obtient alors : $\forall t \in [0,T]$, $Y_t^1 \leq Y_t^2$, $\mathbb{P}$-p.s.
Si, de plus, $Y_0^1 = Y_0^2$, alors : $\forall\ t \in [0,T]$, $Y_t^1 = Y_t^2$ ($\mathbb{P}$-p.s.) et, par conséquent : $Z^1 = Z^2$ et $U^1 = U^2$.

La dernière assertion est appelée résultat de comparaison strict. Au vu des hypothèses faites, la preuve résulte de l'application d'une procédure classique de linéarisation au générateur f^2. On obtient le même résultat sous l'hypothèse symétrique suivante : f_1 satisfait (H_{comp}) (et f_2 satisfait (H_{ex})) et l'inégalité suivante est vérifiée

$$f_1(s, Y_s^2, Z_s^2, U_s^2) \leq f_2(s, Y_s^2, Z_s^2, U_s^2)\ \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

L'une des conséquences directes du résultat de comparaison fourni par ce théorème 0.3 est le résultat d'unicité (obtenu pour : $f_1 = f_2$ et $\eta_1 = \eta_2$). Comme dans le cadre brownien, la preuve du théorème 0.2 d'existence repose sur l'existence d'estimations a priori précises des normes des solutions. Les hypothèses nécessaires au résultat de comparaison sont nettement plus contraignantes que dans le cas brownien. Ceci est l'une des difficultés majeure de l'étude des EDSR à croissance quadratique et avec sauts.

Dans la section qui suit, nous rappelons les principaux résultats ayant été établis sur les EDSR quadratiques (dans le cadre brownien) et on insiste sur les schémas des preuves qui sont adaptables à des cadres d'étude beaucoup plus généraux, ce qui fera l'objet du travail mené dans cette thèse.

0.2 Rappel des résultats dans le cadre quadratique

0.2.1 Le cadre

Dans le cadre brownien (étudié notamment par [KOB]), une EDSR du type (Eq0.1) est dite quadratique lorsque le générateur f satisfait la condition :

$$(C_0) \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ |f(s,y,z)| \leq \alpha_s + b|y| + \frac{\gamma}{2}|z|^2, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s,$$

où b, γ sont des constantes positives et α est un processus adapté positif satisfaisant la propriété d'intégrabilité suivante :

$$\exists\, C > 0, \quad \int_0^T \alpha_s ds \leq C,\ \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

La contrainte (C_0) n'est pas la plus générale qui soit. Cette condition fournit un exemple de contraintes sur le générateur d'une EDSR permettant d'établir un résultat d'existence (dans le cadre d'une filtration brownienne). Dans toute l'étude des EDSR quadratiques et pour pouvoir se référer aux résultats classiques de comparaison (tels que celui énoncé au théorème 0.3), on ne considère que des EDSR unidimensionnelles. La solution d'une telle EDSR est un couple $(Y,\, Z)$ de processus adaptés et appartenant à $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ et on rappelle la définition de ces espaces :

- $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) = \{Y,$ processus càdlag adapté tel que : $\underset{s,\omega}{\text{esssup}}(|Y_s(\omega)|) < \infty\}$.
- $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d) = \{Z,$ processus prévisibles satisfaisant : $\mathbb{E}(\int_0^T |Z_s|^2 ds) < \infty\}$.

0.2.2 Les résultats d'existence et de stabilité

Avant de redonner les résultats majeurs d'existence concernant les EDSR quadratiques, on précise les hypothèses à poser sur les paramètres des EDSR étudiées.

Hypothèses préliminaires

Soient c une fonction croissante continue, a et b deux processus adaptés et à valeurs dans $L^1([0,T])$. Le générateur f vérifie l'hypothèse $(H_{0.1})$ si, pour tous (s,y,z) appartenant à $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$(H_{0.1}) \begin{cases} f(s,y,z) = a(s)y + F_0(s,y,z), \\ \text{avec : } |F_0(s,y,z)| \leq b(s) + c(|y|)|z|^2, \ \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \\ \text{ainsi que} \\ (y,z) \to f(s,y,z) \text{ est continue (pour tout s).} \end{cases}$$

On note que, sous cette hypothèse, le générateur est contrôlé par la somme d'un terme quadratique en z et d'un processus $\phi : (s,y) \to a(s)y + b(s)$

qui est continu (puisque linéaire) en la variable y. Le résultat d'existence (théorème 0.4) énoncé au paragraphe suivant a été généralisé dans [LEP98] au cadre d'un générateur f seulement continu et à croissance dite surlinéaire par rapport à y : i.e., le processus ϕ qui domine $f(.,.,0) : (s, \omega, y) \to f(s, y)$ est croissant et vérifie la condition suivante $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dy}{\phi(y)} = +\infty$. (un exemple de telle fonction est : $y \to y\ln(y)$.)
Dans toute la suite, sauf mention contraire, la condition terminale est supposée bornée et on appelle solution de l'EDSR (Eq0.1) de générateur satisfaisant $(H_{0.1})$, tout couple de processus adaptés (Y, Z) appartenant à $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ et tel que $t \to f(t, Y_t, Z_t)$ appartienne à $L^1([0, T])$.

Enoncés des résultats

Bien que les résultats présentés dans cette section peuvent s'étendre à des EDSR à horizon aléatoire, on ne considère que les résultats concernant un temps T déterministe, qui est le cas traité par la suite. Lorque l'on parle de la filtration $\mathcal{F}$, on entend la filtration restreinte à $[0, T]$ (à savoir : $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$).

Théorème 0.4 *Supposons que les paramètres $(f,\ \xi)$ de l'EDSR (Eq0.1) soient tels que le générateur f vérifie l'hypothèse $(H_{0.1})$, $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante continue et : $\xi \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$, alors l'EDSR possède au moins une solution $(Y,\ Z)$ appartenant à $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$.*
D'autre part, il existe une solution minimale $(Y_*,\ Z_*)$ (resp. une solution maximale $(Y^*,\ Z^*)$) qui est caractérisée par la propriété suivante :
Si on considère une EDSR de paramètres $(g,\ \zeta)$ qui vérifie :

$$f \leq g \text{ et : } \xi \leq \zeta \text{ (resp. } f \geq g \text{ et } \xi \geq \zeta)$$

et pour laquelle on connait une solution $(Y_g,\ Z_g)$, alors on a les relations suivantes :

$$Y_* \leq Y_g \ \text{ (resp. } Y^* \geq Y_g).$$

Ce théorème assure ainsi l'existence d'une solution minimale à toute EDSR à croissance quadratique satisfaisant l'hypothèse $(H_{0.1})$. La démonstration de ce théorème s'appuie très fortement sur le lemme (dit de stabilité par monotonie) suivant (on renvoie aussi à [KOB]) :

Lemme 0.2 *Soient $(f,\ \xi)$ et $(f^n,\ \xi^n)_n$ les données d'EDSR vérifiant les conditions suivantes :*
- *(1) Pour tout s et presque sûrement, la suite de générateurs $(f^n)_n$ converge de façon monotone vers f (avec f continue) sur les compacts de $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\sup\limits_n \xi^n \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ et $\xi^n \to \xi$ ($\mathbb{P}$-p.s.).*
- *(2) Il existe $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que : $k \in L^1([0, T])$ et une constante C,*

$C > 0$, de sorte que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, (s, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad |f^n(s, y, z)| \leq k_s + C|z|^2.$$

• *(3) Pour tout n, l'EDSR caractérisée par $(f^n,\ \xi^n)$ possède une solution $(Y^n,\ Z^n)$ dans $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Cette solution est telle que $(Y^n)_n$ est monotone (de même sens de monotonie que (f^n)) et satisfait :*
$\exists\, M > 0,\ \forall\, n,\ |Y^n|_{S^\infty} \leq M$.
Sous les conditions (1), (2) et (3), il existe un couple de processus $(Y,\ Z)$ $\in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ qui est une solution de l'EDSR donnée par $(f,\ \xi)$ et cette solution est telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{s\in[0,T]} |Y_s^n - Y_s| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s., \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\displaystyle\int_0^T |Z_s^n - Z_s|^2 ds) = 0. \quad (i.e.\ Z^n \to Z \ \ dans\ L^2(W).) \end{cases}$$

Remarques

Justifions brièvement le terme de résultat de stabilité : l'objectif de ce lemme est de prouver un résultat de convergence des solutions d'une suite d'EDSR de paramètres $(f^n,\ \xi^n)$ vers une solution de l'EDSR, dont les paramètres (f, ξ) sont obtenus comme limite au sens précisé dans le point (1) du lemme précédent. Du fait que cette construction est basée sur une approximation, on obtient seulement un résultat d'existence (et non d'unicité) alors que, dans le cadre Lipschitz, l'utilisation appropriée (dans un espace de Banach) d'un théorème de Picard (qui est un théorème de point fixe) fournit à la fois l'existence et l'unicité. Toutefois, l'utilisation d'une procédure d'approximation monotone permet d'obtenir l'existence de solutions minimales ou maximales (dans l'article [BRI06], ceci est réalisé à l'aide d'une procédure classique d'inf-convolution).

Eléments de preuve

L'objectif de cette section est de fournir quelques détails sur les méthodes usuelles utilisées dans cette thèse : dans les différentes preuves d'existence dont nous nous inspirerons, la procédure consiste essentiellement à justifier successivement les étapes suivantes :

- l'existence d'estimations a priori pour toute solution (Y, Z). Tout processus Y solution d'une telle EDSR est ainsi comparé à la solution d'une équation différentielle ordinaire.

- la construction d'une suite de solutions (Y^n, Z^n) à des EDSR classiques (avec des générateurs f^n suffisamment réguliers, i.e lipschitziens par rapport à y et z) : cette étape consiste en l'approximation du générateur par une suite monotone (f^n) de générateurs satisfaisant les hypothèses classiques (telles qu'énoncées au théorème 0.1).

- la justification d'un résultat de stabilité par monotonie : la propriété de monotonie est obtenue en exploitant les résultats de comparaison établis dans le cadre standard et ce résultat de stabilité repose essentiellement sur la convergence (forte) dans $L^2(W)$ de la suite de processus (Z^n) construites à l'étape précédente.

Cette méthode s'inspire notamment d'outils théoriques provenant de l'analyse de certaines EDP (semilinéaires) et elle a été originairement employée dans [KOB] puis aussi dans [LEP98], pour des générateurs quadratiques en z et à croissance (au plus) surlinéaire en y. Afin de justifier ces résultats, il est d'autre part très commode d'utiliser les outils spécifiques du calcul stochastique (telle que la formule d'Itô) ainsi que du résultat de comparaison dans le cadre classique des EDSR (dites Lipschitz) unidimensionnelles.

On donne maintenant une extension du résultat d'existence. La preuve de ce résultat peut être trouvée dans l'article [BRI06]. On énumère ci-dessous les nouvelles hypothèses sur les paramètres :
• le générateur f satisfait l'hypothèse $(H_{0.2})$ suivante (un peu moins générale que $(H_{0.1})$)

$$(H_{0.2}) \begin{cases} \exists\, \alpha \geq 0,\ \beta, \gamma > 0,\ (\frac{\beta}{\gamma} \leq \alpha) \quad \text{tels que} \\ \qquad |f(s,y,z)| \leq \alpha + \beta|y| + \frac{\gamma}{2}|z|^2,\ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \end{cases}$$

• la condition terminale ξ n'est plus supposée bornée, mais elle satisfait seulement la condition suivante, donnant l'existence d'un moment exponentiel

$$(C_1) \quad \exists\, \lambda,\ \lambda > \gamma e^{\beta T} \text{ t.q. } \mathbb{E}(e^{\lambda|\xi|}) < \infty.$$

On définit les espaces dans lesquels on cherche des solutions sous ces dernières hypothèses :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \bigcup_{p, p>1} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{p,p>1} \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^d),$$

où les espaces $\mathcal{S}^p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^d)$ sont définis comme suit :
- $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}) = \{Y, \text{processus adaptés tels que : } \mathbb{E}\big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^p\big) < \infty\}$.
- $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^d) = \{Z, \text{processus prévisibles satisfaisant : } \mathbb{E}(\int_0^T |Z_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} < \infty\}$.

Il est clair, d'une part, que pour tout p, $p > 1$, l'espace $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R})$ est strictement inclu dans $\mathcal{S}^p(\mathbb{R})$. D'autre part, tout processus Y tel que (Y, Z) est une solution de l'EDSR, dont les paramètres $(f,\ \xi)$ satisfont (C_1) et $(H_{0.2})$, n'a aucune raison d'être borné en général. Cette hypothèse $(H_{0.2})$ permet notamment l'établissement d'estimations a priori précises quant aux normes des solutions et, tout comme dans [KOB], la procédure qui conduit à ces estimations repose sur la comparaison avec la solution d'une équation différentielle ordinaire. L'un des points techniques essentiel de cette preuve donnée dans [BRI06] est l'utilisation d'une procédure de localisation : cette dernière consiste en l'introduction d'une suite (τ^k) de temps d'arrêt bien choisie, de sorte que la famille des EDSR dites arrêtées au temps τ^k aient à nouveau une condition terminale bornée.

Théorème 0.5 *Sous ces nouvelles hypothèses* $(H_{0.2})$ *et* (C_1) *sur les paramètres* (f, ξ)*, l'EDSR (Eq0.1) possède une solution* (Y, Z) *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.

Du fait de la construction de cette solution, qui est obtenue comme limite d'une suite de solutions d'EDSR, l'unicité n'est plus garantie, tout au moins, plus par le raisonnement employé lorsque la condition terminale est bornée. En effet, anticipant ici sur les résultats et méthodes décrits dans la section qui suit, l'appartenance à l'espace des martingales BMO de l'intégrale stochastique $\int_0^\cdot Z_s dW_s$ n'est plus vérifié dans le cadre d'une condition terminale non bornée. Cette notion de martingale BMO est introduite au paragraphe 0.2.3 qui suit dans la définition 0.1 et cette dernière notion est essentielle dans le cadre des preuves des résultats d'unicité qui sont présentées ci-dessous (ces preuves sont basées sur le théorème de Girsanov).

0.2.3 Résultats d'unicité et de comparaison

On présente d'abord le résultat d'unicité donné dans [KOB] dans le cadre brownien, dont on reprécise les hypothèses ci dessous. On dit que f satisfait $(H_{0.3})$ avec les processus adaptés notés c_f et c_z, et avec les constantes C_f, C_z, si pour tout (s, y, z), $(s, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{cases} |f(s, y, z)| \leq c_f(s) + C_f|z|^2, & \mathbb{P}\text{-p.s et pour tout } s. \\ |\frac{\partial f}{\partial z}(s, y, z)| \leq c_z(s) + C_z|z|, & \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \end{cases}$$

f satisfait $(H_{0.4})$ si, pour tout $\epsilon > 0$, (ϵ arbitrairement proche de 0), il existe c_ϵ, $c_\epsilon \in L^1([0, T])$ tel que, pour tout $(s, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ on ait :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(s, y, z) \leq c_\epsilon(s) + \epsilon|z|^2 \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s$$

(ceci fournit un contrôle de la dérivée partielle de la fonction $f = f(s, y, z)$ par rapport à la seconde variable). On rappelle ici qu'une sur-solution (resp.

une sous-solution) d'une EDSR donnée par f et ξ est un triplet de processus adaptés $(Y_t,\, Z_t,\, C_t)_{0\leq t\leq T}$ qui vérifie en outre :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T dC_s \text{ (resp. } - \int_t^T dC_s),$$

où $(C_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus continu à droite et croissant ($C \in RCI(\mathbb{R})$. Un triplet de processus étant à la fois sur et sous solution est une solution de notre EDSR. Avec ces notations, voici l'énoncé du principe de comparaison (qui donne aussi l'unicité d'une solution)

Théorème 0.6 *Soient $(f^1,\, \xi^1)$ et $(f^2,\, \xi^2)$ les données de deux EDSR du type (Eq0.1) et on suppose que les assertions ci-dessous sont vérifiées :*

1. *Pour tout $(s, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a*
$$\big(\xi^1 \leq \xi^2 \text{ et } f^1(s, y, z) \leq f^2(s, y, z)\big) \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$
2. *Il existe $c_f \in L^1([0, T])$, $c_z \in L^2([0, T])$, $c_\epsilon \in L^1([0, T])$, ainsi que deux réels C_F et C_z, tels que f^1 et f^2 satisfait les hypothèses ($H_{0.i}$) pour $i = 3, 4$.*

Si, de plus, le triplet $(Y_t^1,\, Z_t^1,\, C_t^1)_{0\leq t\leq T}$ qui appartient $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d) \times RCI(\mathbb{R})$ (resp. $(Y_t^2,\, Z_t^2,\, C_t^2)$ appartenant au même espace) est une sous-solution (resp. une sur solution) de l'EDSR donnée par $(f^1,\, \xi^1)$ (resp. par $(f^2,\, \xi^2)$), on obtient alors :

$$\forall t \in [0, T],\ Y_t^1 \leq Y_t^2,\ \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Afin de résoudre le problème de l'unicité, il est possible d'apporter des conditions moins contraignantes que celles imposant la différentiabilité de f dans le théorème 0.6 : par exemple, dans [HU05], le problème de l'unicité est résolu sous la condition suivante :

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, s\ |f(s, y, z) - f(s, y, z^{'})| \leq C(1 + |z| + |z^{'}|)|z - z^{'}|,\ \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

L'EDSR étudiée dans ce cadre est toujours considérée en horizon déterministe. D'autre part et dans l'article précité, le générateur est explicite puisqu'il est introduit lors de la résolution d'un problème spécifique de mathématiques financières et cette condition est donc aisée à vérifier.

On termine cette section en introduisant une nouvelle notion qui est celle de martingale BMO. Cette définition de martingale BMO est donnée en toute généralité au chapitre 7 (définition 76) dans [DEL80] (i.e. pour une martingale quelquonque et éventuellement discontinue) : celle-ci nécessite de considérer le crochet droit noté $[M]$ (qui correspond au processus de variation quadratique).

Définition 0.1 *M est une martingale BMO si et seulement si l'une des deux définitions suivantes est vérifiée :*

1. *Dans le cas général, il existe une constante c, $c > 0$, telle que pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ,*

$$ess\sup_{\Omega}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}([M,M]_T - [M,M]_{\tau_-}) \leq c^2.$$

La norme BMO est la plus petite constante c telle que cette inégalité est vérifiée (quelque soit le $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ).

2. *Dès que le crochet oblique $\langle M\rangle$ est défini, il existe une constante c, $c > 0$, telle que pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ,*

$$ess\sup_{\Omega}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau) \leq c^2 \text{ et : } |\Delta M_\tau|^2 \leq c^2,$$

ΔM_τ désignant le saut éventuel du processus M au temps τ. Si les deux inégalités sont vraies pour tout temps d'arrêt τ avec la constante c, alors la norme BMO est majorée par $2c$.

L'espace particulier BMO(W) correspond au cadre des martingales browniennes (de carré localement intégrables). On sait que, pour toute martingale M brownienne de carré intégrable, définie sur $[0,T]$ et telle que $M_0 = 0$, le théorème de représentation prévisible des martingales fournit l'existence d'un processus ϕ (de carré intégrable) tel que : $M = \int_0^\cdot \phi_s dW_s$. Dans ce contexte, l'espace BMO(W) consiste en l'ensemble des martingales M ayant la représentation précédente et qui satisfont de plus

$$\forall\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt } \exists c > 0, \quad \mathbb{E}(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(\int_\tau^T |\phi_s|^2 ds|\mathcal{F}_\tau) \leq c.$$

Cette définition est valable lorsque le crochet dit oblique et noté $\langle M\rangle$ existe, ce qui est le cas lorsque M est continue et de carré (localement) intégrable. D'autre part, pour toute martingale M de carré (localement) intégrable, le crochet oblique (noté $\langle M\rangle$) existe et c'est dans ce cas que l'on se place dans la thèse. Dans le cadre d'une EDSR considérée en filtration brownienne, où le générateur n'est pas lipschitzien, l'existence d'un théorème de comparaison est assurée par

1 d'une part, le contrôle des accroissements du générateur,

2 d'autre part, les estimations dans l'espace BMO de l'intégrale stochastique $Z \cdot W$, pour toute solution (Y, Z) d'une EDSR (de type quadratique).

0.3 Préliminaires de mathématiques financières

La motivation de l'étude théorique menée dans cette thèse provient notamment de l'application de ces résultats en mathématiques financières (et, en particulier, à des problèmes d'optimisation de portefeuille). Ceux-ci ont pour objectif de répondre à des problèmes de couverture d'actif contingent. L'objet de cette section consiste à rappeler les notions ainsi que les outils nécessaires à la résolution de ce type de problèmes.

0.3.1 Introduction des concepts de base

Le contexte est celui d'un marché financier qui consiste en la donnée des objets suivants :

1. Un espace probabilisé standard $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et une date de maturité T (encore appelé horizon).
2. Un processus de prix $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ adapté à une filtration $\mathcal{F}$ (qui satisfait les conditions habituelles) et son équation d'évolution (i.e., en général, une EDS).

Quelques remarques

– L'horizon T du marché financier est fixé et déterministe. Tous les processus étudiés sont supposés adaptés par rapport à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ donnée (prévisibles dans le cas où la filtration est discontinue).

– Le processus S représente le prix des actifs risqués présents sur le marché financier : en règle générale, si on note S^0 le prix de l'actif non risqué, dont le taux d'intérêt est $r := (r(t))$ et satisfait : $\exp(\displaystyle\int_0^t r_s ds) < \infty$ (pour tout t dans $[0, T]$), alors la valeur $\tilde{S}_t$ actualisée à la date t est donnée par

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{S_t}{S_0^0}.$$

Par souci de simplification, on supposera désormais, sans restriction dans l'étude menée, que : $r \equiv 0$ (de sorte que S et $\tilde{S}$ coincident).

– On précise ci-dessous la forme du processus de prix dans l'un des modèles de marché financier couramment utilisé, à savoir celui de Black et Scholes. Ce processus noté S est unidimensionnel et donné par

$$dS_t = S_t\big(bdt + \sigma dW_t\big),$$

où les processus de drift et de variance apparaissant dans l'EDS sont des constantes, respectivement égales à b et σ (avec $\sigma \neq 0$) et où W est un mouvement brownien standard. D'autre part, ce processus s'écrit sous la forme exponentielle suivante :

$$S_t = S_0 \exp\big(\sigma W_t + (b - \frac{\sigma^2}{2})t\big).$$

Hypothèses usuelles
Sur le marché financier, le processus de prix S est généralement une semimartingale d dimensionnelle qui s'écrit sous la forme :

$$S = S_0 + M + A, \tag{1}$$

avec M une martingale telle que : $M \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$, i.e. M est une martingale locale de carré intégrable (M est continue dès que S l'est) et A qui représente la partie à variation finie (A peut être pris prévisible lorsque S est spéciale). On renvoie le lecteur à [ANS] pour la justification du fait que le processus S représentant le prix des actifs risqués sur le marché est une semimartingale, sous l'hypothèse classique de non arbitrage. De ce fait, nous pouvons utiliser les outils classiques de calcul stochastique (en particulier, la formule d'Itô). De plus, dans le cadre de semimartingales spéciales, qui est le cadre dans lequel on se place, la notion de crochet oblique $\langle M \rangle$ d'une martingale (locale) M de carré intégrable est bien définie. (ce crochet oblique est défini par [DEL80] comme projection duale prévisible du crochet droit ou processus de variation quadratique) .

Dans la définition qui suit, on introduit les notions de processus de richesse d'un agent et de stratégie associée (pour le cas où il y a d actifs risqués sur le marché) :

Définition 0.2 *On appelle stratégie π d'un agent financier tout processus d-dimensionnel $\mathcal{F}$-prévisible tel que l'intégrale stochastique $X^\pi_\cdot := \int_0^\cdot \pi_s \frac{dS_s}{S_{s-}}$ avec S de forme donnée par (1) ait un sens : on suppose que la condition suivante soit vérifiée*

$$\mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^d \int_0^T |\frac{\pi^i_s}{S^i_{s-}}|^2 d\langle S^i \rangle_s\big) < \infty.$$

Le processus (de richesse) X^π est défini, pour tout t :

$$X^\pi_t = x + \int_0^t \pi_s \frac{dS_s}{S_{s-}},$$

où x désigne la richesse initiale de l'agent, qui est une constante réelle en tant que variable $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Cette définition du processus de richesse n'est valable que sous l'hypothèse particulière $r \equiv 0$. Si ce n'est pas le cas, l'équation du processus de richesse X^π a été donnée notamment dans le cadre brownien dans [ELK00]

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t^* \sigma_t \big(dW_t + \eta_t dt\big),$$

où r désigne le taux d'intérêt de l'actif non risqué, chaque composante du vecteur π représente les montants investis dans chaque actif risqué (la notation π^* désignant la transposition) et η désigne le processus appelé processus risque premium. Le processus $\tilde{X} := X e^{-\int_0^\cdot r_s ds}$ satisfait donc une EDS dirigée par le mouvement brownien W du même type que X. L'une des hypothèses fondamentales dans l'étude des marchés financiers est celle d'absence d'opportunité d'arbitrage. On dit qu'une stratégie π définit une opportunité d'arbitrage lorsque les conditions ci-dessous sont satisfaites

$$X_0^\pi = 0, \ \forall\, t, \ X_t^\pi \geq 0, \ \mathbb{P}\text{-p.s. et } \mathbb{P}(X_T^\pi > 0) > 0.$$

De nombreux articles se sont intéressés à d'autre traduction de cette hypothèse (dans le contexte de marchés financiers très généraux). Sans rentrer dans le détail des preuves existantes (on renvoie à [DEL94a] ou [STRI90]) et qui sont relativement techniques, on précise que cette notion de non arbitrage est reliée à l'existence d'au moins une mesure de martingale locale pour le processus S.
L'un des problèmes auquel les financiers s'intéressent est celui de la couverture d'un actif contingent, c'est-à-dire d'une variable B $\mathcal{F}_T$-mesurable et qui représente le contrat ou engagement financier. Ce problème revient à chercher une stratégie π telle que :

$$\exists\, \pi \text{ t.q.} \quad B = X_T^\pi := x + \int_0^T \pi_s \frac{dS_s}{S_{s-}}.$$

Un tel actif B est alors dit réplicable et un marché est dit complet lorsque tous les actifs contingents sont réplicables. Dans un tel marché et s'il existe une mesure de martingale, le prix de l'actif B est donné, à la date t, par la représentation suivante :

$$P_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_T^\pi|\mathcal{F}_t) = X_t^\pi,$$

où $\mathbb{Q}$ est l'unique mesure équivalente qui est une densité de martingale pour S. En particulier, dans le modèle de Black et Scholes, le processus de prix continu S est donné par l'EDS unidimensionnelle suivante (dirigée par un brownien W)

$$\frac{dS_s}{S_s} := \sigma dW_s + b ds,$$

où b, σ sont des constantes. Sous ces hypothèses sur les paramètres et sous la condition $\sigma > 0$, le modèle est complet et libre d'arbitrage, et de plus la densité de la mesure de probabilité équivalente est donnée à la date T par la relation suivante :

$$Z_T = \frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}} = \exp(-\theta W_T - \frac{\theta^2}{2}T),$$

où le processus θ est constant et égal à $\sigma^{-1}b$. Le processus Z qui est l'exponentielle stochastique de $-\theta \cdot W$ (exponentielle notée dans la suite $Z := \mathcal{E}(-\theta \cdot W)$) est ainsi une vraie martingale. On donne à la section 0.3.3 la définition de l'exponentielle stochastique ainsi qu'un critère permettant de conclure que le processus Z est une densité de martingale. Lorsque ce critère est vérifié, la mesure notée $\mathbb{P}^\theta$ (de densité Z) est alors une mesure équivalente de martingale (ou encore mesure risque neutre).

Dans le cadre de notre étude, nous nous plaçons au contraire dans le cas de marchés incomplets, dans lequel il n'y a plus nécessairement réplicabilité de l'actif contingent B. Les sources d'incomplétude peuvent être d'origines diverses : se référant à l'article [HU05], ce peut être le cas notamment en filtration brownienne lorsque le nombre d'actifs risqués est strictement inférieur à la dimension du brownien considéré, mais aussi lors de présence de contraintes supplémentaires sur le portefeuille (on peut ainsi imposer une restriction sur l'ensemble des valeurs prises par les stratégies) ou encore lors de présence sur le marché d'évènements non prévisibles : un exemple est fourni par la théorie du risque de crédit (cette notion est étudiée dans [BIE]). Du point de vue de la mathématique financière, cette condition d'incomplétude se traduit par le fait qu'il n'y a pas unicité d'une mesure de martingale équivalente pour le processus de prix S, ce qui induit donc qu'il n'y a pas unicité du prix d'un actif. Dans ce contexte, on définit la notion d'intervalle de prix assurant le non arbitrage. On note $\mathcal{P}_e$ l'ensemble constitué des mesures de martingales équivalentes :

$$\mathcal{P}_e = \{\mathbb{Q}, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ est une densité de martingale et } \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\}.$$

Contrairement au cas de marché complet, les prix satisfaisant cette condition de non arbitrage sont les réels compris dans l'intervalle ouvert et, sous la condition d'absence d'arbitrage, non réduit à un singleton, défini comme suit :

$$]\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B), \ \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B)[=]h_{\text{low}}, h^{\text{upp}}[,$$

où l'on reprend la terminologie de [ELK00]. Le prix h_{low} (resp. h^{upp}) désigne le prix de surréplication pour l'acheteur (resp. prix de surréplication pour le vendeur). En effet pour le vendeur, le prix de l'actif représente le montant initial minimal d'argent à posséder pour s'assurer que la vente au prix B se fera sans perte, il est défini aussi comme suit :

$$h^{\text{upp}} = \inf_{x\geq 0}\{x, \ X_T^{\pi,x} \geq B\},$$

alors que le prix de l'acheteur est défini par

$$h_{\text{low}} = \sup_{x \geq 0} \{x, \; X_T^{\pi,-x} \geq -B\}.$$

Dans le cas d'un marché sans opportunité d'arbitrage et complet, tout actif contingent B est réplicable et le prix de l'actif B est donné en termes de l'unique mesure de martingale équivalente $\hat{P}$ par : $\mathbb{E}^{\hat{P}}(B) = h_{\text{low}} = h^{\text{upp}}$. Dans ce cas, l'intervalle est prix assurant le non arbitrage est réduit à un singleton qui est appelé prix de l'actif financier.
On justifie dans la section qui suit l'une des raisons de l'étude du problème de maximisation de l'utilité d'un portefeuille.

0.3.2 Présentation du problème étudié

Dans le contexte d'un marché incomplet, i.e. du fait de l'absence de stratégie de réplication, on va chercher à redéfinir la notion de stratégie optimale. Ceci est l'une des motivations conduisant à s'intéresser à des problèmes d'optimisation de l'utilité (d'un portefeuille). Le problème particulier qui nous intéresse est celui de la maximisation de l'utilité de portefeuille (sous contraintes). Nous traitons de façon majoritaire et dans chacune des grandes parties de cette thèse le cas de l'utilité exponentielle. On évoque toutefois le cas de deux autres fonctions d'utilité : l'utilité puissance et l'utilité logarithme sont ainsi considérées à la section 3.3 de la première partie de la thèse, dans le cas particulier où il n'y a pas d'actif contingent (à savoir lorsque : $B \equiv 0$). Ce problème d'optimisation est très largement étudié dans des contextes différents et avec diverses méthodes de résolution et on distingue ci-dessous deux approches du problème :

(1) une approche consistant à introduire le problème dual associé au problème d'optimisation, lorsque ce dernier est formulé de manière statique. On cite comme références (non exhaustives) les articles [DEL97] ou [SCH], dans lesquels l'étude a été menée dans le contexte de marchés financiers très généraux.

(2) une approche qualifiée de dynamique et qui est basée sur le principe de la programmation dynamique (l'utilisation de ce principe provient de la théorie du contrôle stochastique et une formulation en est donnée dans la proposition 3.3 de [ELK97c]). Dans le cadre markovien, ce principe permet de justifier la forme de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par la fonction valeur (un exemple de telle équation (sous forme intégro-différentielle) est fourni par l'équation 4.4 dans [BEC04] dans le cadre d'un marché présentant des sauts). L'un des intérêts des EDSR (non linéaires) est la possibilité de s'affranchir du cadre markovien.

On s'attache, dans ce qui suit, à présenter le problème de maximisation de l'utilité exponentielle sous contraintes. Dans tout le paragraphe, la notation U_α désigne l'utilité exponentielle (de paramètre α, $\alpha > 0$) définie pour tout x par : $U_\alpha(x) := -\exp(-\alpha x)$. Ce paramètre α est une mesure du degré d'aversion au risque. On justifie ci-dessous cette terminologie pour le paramètre α : le problème consiste à chercher la valeur optimale de l'utilité du portefeuille, une fois livré l'actif contingent B, à la date d'échéance T. Or, au vu de la définition de U_α, cette valeur optimale est d'autant plus faible que α est grand. Autrement dit, plus ce coefficient α est grand, plus on pénalise les réalisations faibles (cette notion de pénalisation est présentée dans [ELK00], article qui apporte des résultats pour ce problème d'optimisation en employant les deux approches et dans le cadre de contraintes convexes sur le portefeuille).

Cadre et hypothèses On se place dans le cadre d'un marché financier (comme introduit dans la section précédente), la filtration notée $\mathcal{F}$ est quelquonque (éventuellement discontinue) mais satisfait les hypothèses usuelles de complétude et de continuité à droite. On note toujours par d le nombre des actifs (risqués) présent sur le marché, par S le processus de prix (d dimensionnel) associé et par T l'horizon. D'autre part, dans notre étude, les stratégies sont supposées prendre leurs valeurs dans un ensemble de contraintes, noté $\mathcal{C}$, qui est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ fermé et non nécessairement convexe (cette dernière condition n'est pas classique et justifie l'approche dynamique qui est choisie pour résoudre le problème).

Les objectifs

1 Caractérisation de la fonction valeur $(V_t^B(x))$ variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable qui est définie à la date t ($t \in [0,T]$) comme suit :

$$(\text{P1}) \quad V_t^B(x) \quad = \operatorname*{ess\,sup}_{\pi \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(U_\alpha(x + \int_t^T \pi_u \frac{dS_u}{S_u} - B)).$$

x est une variable $\mathcal{F}_t$ mesurable. (Etant donnée une famille de variables $(Y^i)_i$, la notation $\operatorname*{esssup}_i Y^i$ est introduite dans [DEL80] pour désigner l'unique variable Y^* qui majore Y^i, pour tout i, et telle que toute autre variable Y satisfaisant la même propriété vérifie : $Y^* \leq Y$.)

2 Caractérisation des stratégies optimales (notées π^*) qui sont définies sur $[t,T]$ et répondent aux critères suivants :
• π^* est admissible (i.e. π^* appartient à $\mathcal{A}_t$) au sens de la définition 0.3 ci-dessous (cette notion d'admissibilité constitue un des problèmes délicats).
• π^* réalise le supremum (qui est donc un maximum) dans le problème

(P1)

Définition 0.3 *L'ensemble des stratégies admissibles $\mathcal{A}_t$ consiste en l'ensemble des processus d-dimensionnels $\pi := (\pi_s)_{s\in[t,T]}$ $\mathcal{F}$ prévisibles, satisfaisant que : $\pi_s \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}$-p.s. ainsi que les conditions suivantes d'intégrabilité*

1 $\mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T |\frac{\pi_s^i}{S_{s-}^i}|^2 d\langle S^i\rangle_s\big) < \infty.$

2 L'ensemble $\{\exp(-\alpha X_\tau^\pi), \textit{pour tout}\, \mathcal{F}_t\textit{-temps d'arrêt}\, \tau\}$ *est une famille uniformément intégrable.*

Pour des raisons d'ordre technique liées à la résolution du problème, on élargit la classe habituelle des stratégies admissibles. De façon générale, l'ensemble des processus π d-dimensionnels admissible satisfont une condition du type suivant :

$$\exists\, C \text{ t.q. } \forall\, s,\ s \geq t,\ X_s^\pi \geq C,$$

c'est-à-dire qu'on impose un seuil minimal pour le processus de richesse.
On précise les notations pour le reste de cette section : les stratégies considérées sont définies sur $[t,T]$ et le processus de richesse $X^\pi := X^{\pi,t,x}$ qui est associé à la stratégie π, est défini par

$$\forall\, s \in [t,T], \quad X_s^\pi = x + \int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}},$$

Afin de caractériser la fonction valeur du problème, on emploie la méthode déjà employée dans un cadre brownien par [HU05]. Celle ci se base sur des propriétés reliées au principe de programmation dynamique. La méthode consiste à contruire une famille adéquate $(R^\pi)_\pi$ de processus définis sur $|t,T]$ adaptés et satisfaisant

$$\text{(MD)} \quad \begin{cases} (i)\ \forall\, \pi,\ \pi \in \mathcal{A}_t,\ R_t^\pi = R_t, \text{ avec : } R_t \text{ variable } \mathcal{F}_t\text{-mesurable et,} \\ ((R_t^\pi \text{ indépendant de) } \pi) \\ (ii)\ R_T^\pi = -\exp(-\alpha(X_T^\pi - B)), \\ \\ (iii)\ R^\pi \text{ est une surmartingale, pour tout } \pi\ \in \mathcal{A}_t, \text{ et :} \\ \quad \exists\, \pi^*,\ \pi^* \in \mathcal{A}_t, \text{ telle que : } R^{\pi^*} \text{est une martingale.} \end{cases}$$

Pour traduire la dernière condition qui provient des méthodes associés à la programmation dynamique, il s'agit d' employer la formule d'Itô pour une famille (R^π) de processus adéquats : l'outil essentiel pour écrire les conditions de surmartingale et de martingale est la décomposition de Doob Meyer (on se réfère aux théorèmes 6 et 7 de [PRO] pour des énoncés précis de cette décomposition).

Une conséquence de cette formulation du problème par des critères de martingale est de permettre de retrouver le principe dynamique satisfait par la fonction valeur : on démontre ainsi en parallèle les deux résultats suivants

– La fonction valeur associée au problème $(P1)$ satisfait un principe d'optimalité

$$\forall\, \sigma,\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt},\ \sigma \leq \tau,\ V_\sigma^B(x) = \mathbb{E}(V_\tau^B(X_\tau^{\pi^*,\sigma,x})|\mathcal{F}_\sigma),$$

où π^* désigne une stratégie optimale (satisfaisant la condition (iii) de (MD).

– toute stratégie optimale π^* est telle que R^{π^*} est une vraie martingale. Une conséquence fondamentale du principe dynamique est la propriété de consistance de cette stratégie optimale par rapport au temps. Cette propriété s'énonce de la façon suivante : toute stratégie optimale π^* sur $[t,T]$ est encore optimale sur $[s,T]$ $(s > t)$, sous la condition suivante : $X_s^{\pi^*} = X_s^{\pi^*,t,x}$.

0.3.3 Outils théoriques

Afin de compléter cette introduction à la mathématique financière, on donne ici quelques outils de calcul stochastique et de théorie des martingales essentiels à notre étude. On précise que, sauf mention contraire, toutes les semimartingales auxquelles nous faisons référence sont spéciales et que toutes les filtrations (éventuellement discontinues) considérées satisfont les hypothèses usuelles de continuité à droite et de complétude. Dans cette partie, on commence par rappeler un énoncé général d'un théorème de Girsanov, qui est l'outil majeur lorsque l'on travaille sous différentes mesures de probabilité équivalentes et, pour ce faire, nous introduisons le concept de martingale exponentielle. Dans un deuxième temps, nous donnons les résultats majeurs concernant les décompositions de Galchouk-Kunita-Watanabe et Föllmer-Schweizer (cette dernière étant fortement reliée à l'existence d'une densité de martingale).

Changement de mesure équivalente

Avant de donner le résultat essentiel, on donne l'énoncé d'un premier lemme élémentaire :

Lemme 0.3 *On se donne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, une mesure équivalente de probabilité ainsi que le processus Z défini par : $Z_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)$, qui est sa densité de probabilité. Un processus adapté càdlàg M est une $\mathbb{Q}$-martingale locale si et seulement si le processus MZ est une martingale locale sous $\mathbb{P}$.*

L'énoncé qui suit est celui d'un théorème de Girsanov (le lecteur pourra aussi se référer au théorème 20 de [PRO] pour une preuve de ce résultat) qui donne la transformation recherchée :

Théorème 0.7 *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilités équivalentes et soit X une semimartingale (non nécessairement spéciale) sous $\mathbb{P}$ dont une décomposition est donnée par : $X = M + A$. Alors, X est encore une semimartingale sous la mesure équivalente $\mathbb{Q}$, dont une décomposition est donnée sous la forme $X = N + C$, avec le processus N construit comme suit :*

$$N_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s.$$

Ce dernier est une $\mathbb{Q}$-martingale locale et $C = X - N$ est un processus à $\mathbb{Q}$-variation finie.

La preuve de ce théorème de changement de mesure repose essentiellement sur des manipulations simples de la règle d'Itô pour le produit (encore appelée formule d'intégration par parties). On précise qu'en général le caractère spécial d'une semimartingale n'est pas préservé par changement de mesure équivalente : la nouvelle décomposition de la semimartingale n'assure pas le caractère localement intégrable de C, même dans le cas où A l'est au départ. Un exemple précis de cas où il n'existe pas de représentation prévisible du processus à variation finie obtenu après un changement de mesure équivalente est fourni par [STRI85]). Par contre, sous l'hypothèse de bornitude de la densité de martingale, le caractère spécial est préservé.

Pour conclure cette section, on introduit finalement la notion de "martingale" exponentielle, notion qui intervient en pratique pour exprimer la densité de mesure équivalente et appliquer une transformation de Girsanov. On dit qu'un processus Z est la martingale exponentielle (notée $\mathcal{E}(M)$) associée à une martingale M localement de carré intégrable, s'il est solution de l'EDS suivante

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dM_s,$$

et dès que M est localement de carré intégrable, Z appartient à $L^2_{\text{loc}}(M)$ (au sens où l'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} Z_{s-} dM_s$ est localement de carré intégrable). On précise ci-dessous la forme de ce processus selon que M est ou non continue.

Lorsque M est une martingale continue, nulle en 0 et de carré localement intégrable, dont le crochet oblique est donnée par $\langle M \rangle$, l'expression de Z est donnée par

$$\forall\, t, \quad Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t).$$

Dans le cas général où la martingale M possède des trajectoires seulement càdlàg, la martingale exponentielle est donnée par la formule de Doléans-Dade, à savoir :

$$\forall\, t, \quad \mathcal{E}_t(M) = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t)\prod_{s\leq t}(\exp(-\Delta M_s)(1+\Delta M_s)),$$

où M^c désigne la partie martingale continue de M et $\Delta M := (M_s - M_{s-})$ le processus de saut. Le terme de "martingale" employé pour parler de la solution de cette EDS est abusif : en effet, en général et sous les hypothèses suivantes : M est une martingale de carré (localement) intégrable et de sauts strictement supérieurs à -1, le processus Z est une martingale locale positive. Par des arguments classiques, ce processus est une surmartingale.
Les critères donnés dans les articles [KAZ] et [LEP78] (ce dernier traite aussi le cas de l'exponentielle stochastique d'une martingale discontinue, i.e. seulement càdlag) fournissent des conditions suffisantes pour qu'un tel processus $Z := \mathcal{E}(M)$ soit une densité de martingale.

Le paragraphe suivant donne une justification de l'intérêt de ces critères et de l'étude théorique des martingales exponentielles.

Décompositions classiques

Dans toute cette partie les semimartingales considérées sont spéciales (et d'autre part elles sont, soit continues, soit de partie martingale localement de carré intégrable). On se contente ici de redonner sans preuve les définitions de ces deux décompositions [STRI90].

Définition 0.4 *Soient N une martingale réelle et M une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle décomposition de Galchouk-Kunita-Watanabe de N par rapport à M toute décomposition de la forme suivante :*

$$N = N_0 + H \cdot M + L,$$

où $H \in L^2_{loc}(M)$, et L est une martingale nulle en 0 et strictement orthogonale à M, au sens où : $\langle L, M^i\rangle = 0$, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

On note que, lorsque cette décomposition existe, celle-ci est unique. D'autre part, cette dernière existe en particulier lorsque :
- M et N sont deux martingales de carré intégrable.
- M est une martingale continue (et N quelquonque).

Dans la première partie de cette thèse, on se place dans le deuxième cas.

On donne ici la définition de la décomposition de Föllmer-Schweizer, avant d'en expliquer l'intérêt en mathématiques financières (pour les détails concernant les conditions d'existence de cette décomposition, on renvoie aux articles [ANS] et [SCHW95]) :

Définition 0.5 *(1) Soit X une semimartingale (spéciale) d-dimensionnelle dont la décomposition canonique est :*

$$X = X_0 + M + A,$$

où $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ (et M continue dès que X l'est) et A est la partie à variation finie et prévisible.
(2) La semimartingale spéciale X (continue ou de carré localement intégrable) satisfait la condition de structure (SC) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- *Il existe un processus C croissant prévisible et tel que :*

$$\exists\, \sigma \ t.q.\ \sigma_s(\omega) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad d\langle M^i, M^j\rangle_s = \sigma_s^{i,j} dC_s.$$

  (avec σ tel que $\int_0^T |\sigma_s|^2 dC_s < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.).

- *Il existe un processus λ, $\lambda \in L^2_{loc}(M)$ (i.e de façon équivalente : $\kappa_T = \int_0^T \lambda'_s d\langle M\rangle_s \lambda_s < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.) et qui est tel que : $dA = \sigma\lambda dC$.*

Sous ces conditions, posant $\hat{Z} = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$, l'exponentielle stochastique est une martingale locale. Si on impose, de plus, que $\lambda \cdot M$ est une martingale BMO (et $-\lambda\Delta M > -1$, lorsque M est discontinue), $\hat{Z}$ est alors une vraie densité de martingale associée à la mesure équivalente $\hat{\mathbb{P}}$ définie par :

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \hat{Z}_T = \mathcal{E}_T(-\lambda \cdot M).$$

D'autre part, cette mesure est dite minimale au sens où toute autre mesure équivalente de martingale pour X s'écrit sous la forme suivante :

$$Z^*_T = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M + L),$$

où la martingale L est orthogonale à M.
(3) On se place dans le cas (2), à savoir lorsque $\hat{Z}$ définit une densité de martingale et on se donne B une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable. B admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée vis à vis de X, i.e. il existe une variable $\mathcal{F}_0$ mesurable B_0, un processus prévisible intégrable ξ^B et $L^B \in \mathcal{M}_{loc}$ fortement orthogonal à chaque M^i tels que :

$$B = B_0 + (\xi^B \cdot M)_T + L^B_T.$$

De plus, on a : $\hat{Z}\hat{V} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$, ou encore de manière équivalente : $\hat{V} \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{P}})$, avec le processus $\hat{V}$ qui est défini par :

$$\forall\, t,\ \hat{V}_t = B_0 + (\xi^B \cdot M)_t + L^B_t = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(B|\mathcal{F}_t).$$

Quelques remarques et conséquences

1. Le processus C croissant prévisible apparaissant dans (2) n'est pas unique. Par contre, l'intégrale définie par :
$$\kappa := \langle \lambda \cdot M \rangle = \int_0^{\cdot} \lambda_s' d\langle M \rangle_s \lambda_s,$$
est déterminée de façon unique. Ce processus κ qui est relié à λ et auquel on associe la condition de structure est aussi connu sous le nom de mean variance tradeoff. On utilisera cette décomposition particulière dans la première partie de la thèse.

2. On se restreint au cas étudié dans la première partie de la thèse où la martingale (localement de carré intégrable) M est continue et on suppose que l'existence de la densité minimale : à savoir, $\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$ (associée à $\hat{\mathbb{P}}$) est une densité (stricte) de martingale. Lors de l'étude menée dans le cas très particulier où le paramètres λ vaut zéro (la mesure $\mathbb{P}$ coincide avec la mesure minimale $\mathbb{P}^{\lambda}$ de densité $\mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$) dans la section 3.3 de la première partie, on montre que la limite asymptotique (lorsque le paramètre α tend vers 0) du prix d'indifférence associé à l'actif B (prix noté $\pi_\alpha(B)$) est le prix obtenu sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$, à savoir $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(B)$. On donne ici une interprétation complémentaire de cette mesure : le théorème 5 (page 11 de [SCHW95]) caractérise ainsi cette mesure $\hat{\mathbb{P}}$ en tant qu'unique mesure minimisant une certaine fonctionnelle (qui fait intervenir l'entropie). Cette dernière est reliée à la formulation duale du problème de maximisation de l'utilité exponentielle (on renvoie à [SCH]).

0.4 Les résultats majeurs de la thèse

On donne un résumé du contenu de la thèse en insistant sur l'architecture des deux grandes parties ainsi que sur les résultats essentiels qui ont été établis. Voici les deux cadres dans lesquels l'étude est menée :

1 Cadre d'une filtration générale continue (mais non nécessairement brownienne),
(Une filtration est dite continue lorsque toutes les martingales locales sont continues)

2 Cadre d'une filtration discontinue particulière.

Chacune de ces parties s'articule autour d'un même plan d'étude : ainsi, on s'attache dans un premier temps à établir (en généralisant des résultats déjà connus notamment dans le cadre brownien) de nouveaux théorèmes pour des EDSR à croissance quadratique, en utilisant des raffinements successifs sur les différents paramètres. Dans un second temps et exploitant la méthode (MD) introduite dans le paragraphe 0.3.2, on donne une application au problème de maximisation d'utilité d'un portefeuille que l'on résout par la voie des EDSR.

Résultats concernant l'étude théorique des EDSR

Dans la section précédente, on a fait un rappel des résultats théoriques existants concernant les EDSR à croissance quadratique. Bien souvent, ces résultat sont établis dans le cadre brownien : c'est pourquoi on s'intéresse à la question de la généralisation de résultats théoriques à de nouveaux cadres. On note toutefois que des résultats ont déjà été obtenus dans des filtrations plus générales et pour des EDSR non linéaires particulières : ainsi, le problème de maximisation de l'utilité est traité en utilisant des méthodes d'EDSR non linéaires dans le cadre d'une filtration continue (mais non brownienne) par [MAN05] et dans le cadre d'une filtration discontinue par [BEC06]. Le travail mené dans cette thèse constitue un approfondissement de ces résultats et, en particulier, parce que l'on généralise les résultats concernant les EDSR à croissance quadratique.
On donne le fil conducteur des deux parties de la thèse : dans un premier temps, on précise le cadre spécifique d'étude et notamment on se donne une filtration pour laquelle on connait la forme des martingales sur les espaces introduits. La connaissance des martingales est une donnée essentielle dans l'étude des EDSR, notamment lorsque l'on s'intéresse à une formulation dynamique des problèmes. Dans un second temps et pour les EDSR introduites sur cet espace et sous de bonnes conditions sur les paramètres, on établit de

nouveaux résultats d'existence (et/ou d'unicité).

Résultats de la première partie

On suppose l'espace de probabilité muni d'une filtration continue notée $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est complète). Sur cet espace, on considère une martingale M locale d-dimensionnelle, continue et localement de carré intégrable dont le processus de variation quadratique noté $\langle M\rangle$ s'écrit sous forme différentielle : $d\langle M\rangle_s = m_s m_s^{'} dC_s$. On reprend le même type de notation que celle employée dans [ELK97a]. Dans cette expression, m est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ et C un processus croissant continu et prévisible qui est pris borné sur $[0,T]$. Dans ce contexte, la forme des EDSR unidimensionnelles qui nous intéresse est donnée par :

$$Y_t = B + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) dC_s - \frac{\beta}{2}\big(\langle L\rangle_T - \langle L\rangle_t\big) - \int_t^T Z_s dM_s - (L_T - L_t).$$

Ce type d'EDSR est noté EDSR(F,β,B). On définit une solution comme étant un triplet (Y,Z,L) de processus, avec : $L\perp M$ (L est une martingale orthogonale à M, au sens de l'orthogonalité usuelle pour les martingales de carré intégrable) et ces processus sont définis sur les espaces suivants :

1. S^∞ est l'ensemble des processus réels Y continus adaptés et tels que :
$$(\operatorname*{ess\,sup}_{t,\omega} |Y_t|) < \infty,$$
2. $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ est l'ensemble des processus Z prévisibles, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant :
$$\mathbb{E}(\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s) < \infty,$$
3. $\mathcal{M}^2([0,T])$ est l'ensemble des martingales réelles de carré intégrable.

Afin d'obtenir le résultat principal d'existence, on fait deux hypothèses sur les paramètres de l'EDSR : la variable $\mathcal{F}_T$-mesurable B est bornée (hypothèse affaiblie à la dernière section du chapitre 2) et on suppose que F satisfait l'hypothèse $(H_{1.1})$:

$$(H_{1.1}) \begin{cases} \exists\, \bar\alpha,\ \bar\alpha \geq 0,\ \int_0^T \bar\alpha_s dC_s \leq a\ (a>0)\ \text{, et : } b,\ \gamma > 0, \\ |F(s,y,z)| \leq \bar\alpha_s(1+b|y|) + \frac{\gamma}{2}|m_s z|^2\ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \\ \\ \gamma \text{ satisfaisant : } \gamma \geq |\beta| \ \text{ et : } \gamma \geq b. \end{cases}$$

Théorème 0.8 *Supposons que l'EDSR donnée par (F, β, B) soit telle que F vérifie $(H_{1.1})$ et B est bornée, il existe alors une solution (Y, Z, L) à cette EDSR appartenant à $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$.*

Afin d'énoncer le second résultat (à savoir l'unicité), on donne l'hypothèse complémentaire $(H_{1.2})$ suivante sur le générateur F :

$$(H_{1.2}) \begin{cases} \exists\, \mu,\ c_\theta > 0,\ \forall\, z \in \mathbb{R}^d,\ \forall y^1, y^2 \in \mathbb{R}, \\ (y^1 - y^2)(F(s, y^1, z) - F(s, y^2, z)) \leq \mu |y^1 - y^2|^2. \\ \exists\, \theta \text{ t.q. } \displaystyle\int_0^T |m_s \theta_s|^2 dC_s \leq c_\theta,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, z^1,\ z^2 \in \mathbb{R}^d, \\ |F(s, y, z^1) - F(s, y, z^2)| \leq \\ \qquad C(m_s\theta_s + |m_s z^1| + |m_s z^2|)|m_s(z^1 - z^2)|. \end{cases}$$

Théorème 0.9 *Pour toute EDSR donnée par (F, β, B) dont le générateur satisfait les hypothèses $(H_{1.1})$ et $(H_{1.2})$, il existe une unique solution (Y, Z, L) dans $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$.*

Résultats de la seconde partie

Sur le même principe que précédemment, on donne les résultats principaux obtenus dans le contexte de l'espace de Wiener Poisson, introduit dans les préliminaires et sur lequel on rappelle ci-dessous la forme des EDSR :

$$(\text{Eq}0.2) \qquad \begin{aligned} Y_t = B + & \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds \\ & - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x) \tilde{N}_p(dx, ds). \end{aligned}$$

On conserve ici les notations introduites dans les rappels préliminaires de la section 0.1.2 et qui concerne le cadre Lipschitz, cadre notamment étudié dans [ROY03] et dans [PAR97a]. En particulier, $\tilde{N}_p$ désigne la mesure aléatoire de Poisson et n la mesure de Lévy qui lui est associée. $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$ sont les espaces sur lesquels sont définis les processus (prévisibles) Z et U. D'autre part et dans le cas où le générateur $f := f(s, z, u)$ est Lipschitzien (par rapport à z et u), une solution à ce type d'EDSR est un triplet (Y, Z, U) de processus, avec Z et U appartenant encore à $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$. Sous l'hypothèse que f est à croissance quadratique, la différence majeure est que le processus Y est à valeurs dans S^∞ (espace défini au paragraphe précédent et en section 0.2.1).

Dans cette partie, on suppose à nouveau la bornitude de la condition terminale B et on travaille avec une expression explicite du générateur f. Ceci permet de justifier la série de conditions suivantes :

$$(H_{2.1}) \qquad \begin{array}{l} \exists\, c_F > 0,\ D \text{ et } F \text{ deux processus t.q. } D \in BMO(W),\ F \geq 0, \\ \text{avec } \int_0^T F_s ds \leq c_F,\ \mathbb{P}\text{-p.s., et t.q. } \forall z, u \in \mathbb{R} \times L^2(n(dx)) \\ \\ \qquad -(D_s z + F_s) \leq f(s,z,u) \leq \frac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha, \\ \\ \text{où } \forall K,\ |\cdot|_K \text{ est définie par } |u|_K = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{Ku(x)} - Ku(x) - 1}{K} n(dx). \end{array}$$

$$(H_{2.2}) \begin{cases} \exists C > 0, \kappa \in BMO(W),\ \forall\, z,\ z' \in \mathbb{R},\ \forall u \in L^2(n(dx)), \\ |f(s,z,u) - f(s,z',u)| \leq C(\kappa_s + |z| + |z'|)|z - z'|. \\ \forall z \in \mathbb{R},\ \forall\, u, u' \in L^2 \cap L^\infty(n(dx)), \\ f(s,z,u) - f(s,z,u') \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma_s(u,u')(u(x) - u'(x)) n(dx), \\ \text{avec } \ \gamma(u,u') \text{ satisfaisant} \\ \forall K,\ \exists \bar{C}_K, \delta_K > 0,\ \forall\, u, u' \text{ t.q. } u(\mathbb{R}), u'(\mathbb{R}) \subset [-K,K], \\ -1 + \delta_K \leq \gamma(u,u') \leq \bar{C}_K. \end{cases}$$

On précise que le processus γ sera explicitée au chapitre 4 (du fait notamment de la forme explicite du générateur f avec laquelle on travaille).
La première condition $(H_{2.1})$ est une condition de croissance sur le générateur (permettant d'établir des estimations a priori sur les solutions). La deuxième quant à elle est une condition sur les accroissements (le tout dernier contrôle est à rapprocher du théorème 2.5 de l'article [ROY06]). On précise que l'expression (explicite) du générateur f est celle obtenue par application de la méthode (MD) décrite en section 0.3.2 et on conserve ici les notations du problème d'optimisation présenté dans cette section 0.3.2 : en particulier, $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des contraintes sur le portefeuille et π désigne une stratégie (unidimensionnelle dans cette seconde partie). On obtient alors le résultat principal de la seconde partie de cette thèse qui est énoncé ci-dessous.

Théorème 0.10 *On fait les deux hypothèses suivantes :*

$$\big(n(\mathbb{R} \setminus \{0\}) < \infty\big) \text{ et l'ensemble } \mathcal{C} \text{ est compact,}$$

et on considère l'expression suivante du générateur f :

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z+\frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u-\pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta z - \frac{|\theta|^2}{2\alpha},$$

où les paramètres β, σ et θ du modèle sont des processus prévisibles et bornés ($\beta > -1$), toute stratégie π est à valeurs dans $\mathcal{C}$ et la condition terminale B est bornée. Sous ces hypothèses, l'EDSR (Eq0.2) de paramètres $(f,\, B)$ possède une et une seule solution $(Y,\, Z,\, U)$ appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$.

On donne alors les résultats qui ont été établis en affaiblissant les hypothèses sur la mesure de Lévy et sur l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$:

Théorème 0.11 *Sous les mêmes hypothèses concernant les paramètres de l'EDSR de type (Eq0.2) caractérisée par le même générateur f et une condition terminale F bornée, on obtient :*

1. *Existence et unicité si $\mathcal{C}$ est compact et n est seulement σ-finie mais satisfait la condition :*

$$\int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} (1\wedge|x|)^2 n(dx) < \infty.$$

2. *Existence sous l'hypothèse précédente sur n et en supposant seulement que $\mathcal{C}$ est fermé.*

• Une des difficultés majeures, dans ce contexte de filtration discontinue, de l'obtention de résultats d'existence et/ou d'unicité pour des EDSR à croissance quadratique est le contrôle adéquat de la partie saut du processus solution. Pour ce faire et en référence aux travaux déjà existants, il faut justifier les contrôles des accroissements du générateur à la fois en z et u.
• Du fait de la présence de sauts, on se restreint, dans un premier temps, à l'étude du cas où la mesure de Lévy n est finie et où l'ensemble de contraintes est compact. En effet, l'hypothèse de finitude de cette mesure permet de simplifier les estimations a priori, puisqu'elle assure que toutes les variables à valeurs dans $L^\infty(n(dx))$ sont aussi dans $L^2(n(dx))$. Il est ainsi beaucoup plus simple de contrôler les accroissements du générateur des EDSR étudiées. Dans un second temps, on se ramène, via un argument de troncature, à une mesure de Lévy vérifiant seulement l'hypothèse du théorème 0.11.
• Une autre difficulté technique est apportée en modifiant les conditions sur l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$. Du point de vue des mathématiques, la difficulté de se placer dans un cadre non compact résulte de l'absence de bons contrôles d'intégrabilité.

Deuxième partie

Étude en filtration CONTINUE

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre, notre but est d'étendre au cadre d'une filtration supposée continue mais non nécessairement brownienne les résultats généraux obtenus sur les EDSR quadratiques notamment dans [KOB] ou [LEP98].

Après avoir introduit le cadre d'étude et précisé la forme des EDSR que l'on étudie, on s'intéresse précisément aux questions de l'existence et de l'unicité, avec l'objectif d'affiner les hypothèses sur les paramètres de l'EDSR. Se basant sur les résultats obtenus dans le cadre brownien, on est amené dans un premier temps à considérer une condition terminale bornée. Sous de bonnes hypothèses sur le générateur de notre EDSR, il est alors possible de démontrer des résultats d'existence et d'unicité : la preuve de ces résultats constitue le corps principal de cette première partie de la thèse.

La dernière étape dans le raffinement des hypothèses consiste à s'intéresser au cas où la condition terminale est non bornée. De manière analogue à l'article [BRI06], nous sommes en mesure d'établir l'existence d'une solution pour une EDSR quadratique du même type que celle précédemment étudiée. Par contre, le raisonnement précédemment employé pour l'unicité dans le cadre d'une condition terminale bornée n'est plus valable.

A la fin de cette partie, nous donnons comme motivation supplémentaire de cette étude une application au problème de maximisation de l'utilité d'un portefeuille. L'utilisation d'une méthode de résolution dynamique (employée aussi dans [ELK00] et [HU05]) fait naturellement apparaitre une EDSR quadratique et la solution du problème d'optimisation s'exprime en fonction de la solution de cette EDSR. Afin de résoudre ce problème issu de la mathématique financière, nous emploierons ainsi des outils déjà connus tel que le principe d'optimalité pour les martingales et les méthodes pour les EDSR non linéaires que sont les EDSR quadratiques. Nous verrons ainsi comment l'étude théorique menée permet de résoudre le problème financier, ceci pour trois types de fonction d'utilité. Nous concluons cette première partie de la thèse par une application de nos résultats à un problème financier très lié à notre problème d'optimisation. Cette dernière application consiste, d'une part, à donner l'expression (en termes de solutions d'EDSR) du prix d'indifférence vis à vis de l'utilité et, d'autre part, à justifier de résultats asymptotiques portant sur ce prix (ces résultats seront établis pour l'utilité exponentielle et généralisent à notre cadre des résultats déjà présents dans [BEC06]).

1.1 Le cadre continu

Dans tout le chapitre, on se place sur l'espace probabilisé $(\Omega,\ \mathbb{F},\ \mathbb{P})$, espace qui est muni :
• d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les "hypothèses usuelles" (au sens défini dans [PRO], i.e. continue à droite et complète).
• d'une martingale locale M d-dimensionnelle et continue.
On suppose de plus que $\mathcal{F}$ est continue au sens suivant :

toutes les martingales locales de $\mathcal{F}$ sont continues.

Dans la suite, on utilisera la notation $|\cdot|$ pour représenter la norme euclidienne sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ (lorsque $d > 1$) et, d'autre part, T étant un temps déterministe fixé, les processus considérés sont définis sur $[0, T]$. Se référant à la remarque de la section 3 dans [MAN05], on obtient le résultat suivant : toute $\mathcal{F}$-martingale réelle, locale (et donc continue) et s'écrit sous la forme :

$$K = Z \cdot M + L, \tag{1.1}$$

Z étant un processus $\mathcal{F}$-prévisible localement de carré intégrable et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et L étant une martingale réelle de carré intégrable et continue, qui est orthogonale à M (i.e. pour tout i, $\langle M^i, L\rangle = 0$). Pour cette martingale M (continue et de carré intégrable), la notation $\langle M\rangle$ introduite dans la définition 0.1 en section 0.2.3 désigne ici le compensateur prévisible de M qui est à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ et est défini par $\langle M\rangle := (\langle M^i, M^j\rangle)_{(i,j)\in\{1,\cdots,d\}^2}$. On rappelle la définition du processus réel $\langle M^i, M^j\rangle$

$$\forall i, j, \quad M^i M^j - \langle M^i, M^j\rangle \text{ est une martingale réelle locale.}$$

L'écriture donnée par (1.1) n'est autre que la décomposition de Galchouk-Kunita-Watanabe de K, les processus Z et L étant définis de manière unique (à indistinguabilité près). La notation $Z\cdot M$ représente simplement l'intégrale stochastique du processus Z respectivement à la martingale M. On utilisera la notation $Z_s dM_s$ pour la forme différentielle.

D'autre part et comme conséquence simple de l'inégalité de Kunita-Watanabe (valable pour toute martingale locale continue), la mesure $d\langle M^i, M^j\rangle$ associée à chaque composante du processus noté $\langle M\rangle$ est absolument continue respectivement à $d\tilde{C} = \sum_i d\langle M^i\rangle$. Se référant ici à la Proposition 1.15 (chapter IV, [REV]), on peut écrire pour tout i, j

$$\int_0^t |d\langle M^i, M^j\rangle_s| \leq \sqrt{\langle M^i\rangle_t}\sqrt{\langle M^j\rangle_t} \leq \frac{1}{2}(\langle M^i\rangle_t + \langle M^j\rangle_t).$$

Toutefois, le processus $\tilde{C}$ étant en général non borné, on définit pour tout t le processus C par $C_t = \arctan(\tilde{C}_t)$. Ce dernier est un processus réel borné et croissant. Comme $dC_t = \frac{1}{1+\tilde{C}_t^2} d\tilde{C}_t$, chaque composante $d\langle M^i, M^j\rangle$ qui est associée au processus de variation quadratique $\langle M\rangle$ est absolument continue par rapport à la mesure associée au processus croissant C. Pour tout i, j, il existe un processus prévisible $z^{i,j}$ tel que $d\langle M^i, M^j\rangle_s = z^{i,j} dC_s$. Puisque le processus $z = (z^{i,j})$ prend ses valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques positives, celui-ci s'écrit : $z_s = m_s^{'} m_s$. On précise que m est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ et que la notation $m^{'}$ désigne le processus à valeurs matricielles qui est défini, $\mathbb{P}$-p.s. pour tout s, comme suit :

$$\forall i, j,\ (m_s^{'})^{i,j} := (m_s)^{j,i}.$$

On suppose finalement que, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, la matrice $m_s^{'} m_s$ est inversible. Cette hypothèse d'inversibilité est à rapprocher de celle d'uniforme ellipticité de la volatilité (traditionnellement notée σ), qui est une hypothèse classique dans le cadre brownien.

1.2 Les EDSR étudiées

Présentation des objets d'étude

L'objectif de l'étude théorique du chapitre 2 est de résoudre l'EDSR unidimensionnelle donnée sous la forme :

$$(\text{Eq1}) \left\{ \begin{array}{l} dY_s = -F(s, Y_s, Z_s)dC_s - \frac{\beta}{2} d\langle L\rangle_s + Z_s dM_s + dL_s \\ Y_T = B, \end{array} \right.$$

où β est un paramètre réel, F désigne le générateur de l'EDSR et B est la condition terminale de l'EDSR, qui est, sauf mention contraire, supposée bornée. Une solution à l'EDSR (Eq1) de paramètres (F, β, B) est alors un triplet de processus $(Y,\ Z,\ L)$ satisfaisant les conditions suivantes :
- Le triplet (Y, Z, L) est à valeurs dans $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0, T])$ (cet espace est introduit au paragraphe 0.4) avec L satisfaisant : $\langle L, M\rangle = 0$,
- et (Y, Z, L) satisfait l'EDSR(F, β, B) et la fonction $(s, \omega) \to F(s, Y_s(\omega), Z_s(\omega))$ est telle que : $\displaystyle\int_0^T |F(s, Y_s, Z_s)| dC_s < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.

on donne ci-dessous la définition des normes sur cet espace :
$|Y|_{S^\infty} = |\operatorname*{ess\,sup}_{t,\omega} |Y_t||_{L^\infty}$,

$$|Z|_{L^2(d\langle M\rangle\otimes d\mathbb{P})} = \left(\mathbb{E}(\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s)\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ et : } |L|_{\mathcal{M}^2([0,T])} = \left(\mathbb{E}(|L_T|^2)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la suite, lorque l'on fait référence à cette EDSR, on utilise la notation l'EDSR(F, β, B). Cette forme particulière d'EDSR a déjà été introduite dans [MAN05] (avec la même hypothèse de continuité de la filtration) et le cas particulier de l'EDSR$(0, \beta, B)$ de générateur nul a déjà été étudié dans cet article. La particularité de cette EDSR est l'introduction du paramètre β en sus des paramètres classiques que sont le générateur $F = F(s, y, z)$, qui est une fonction aléatoire $\mathcal{P}([0,T]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, et la condition terminale B.

Afin de justifier l'introduction d'une seconde classe d'EDSR, on précise en quoi consiste la difficulté majeure. Celle ci provient de la présence du terme dépendant du processus $\langle L\rangle$. En effet, même si l'on suppose seulement que le générateur F associé à une EDSR du type (Eq1) est lipschitzien par rapport à y et z, on ne sait pas établir de résultat d'existence. Ceci justifie donc l'introduction d'une seconde classe d'EDSR pour laquelle l'existence est plus simple à établir et qui est donnée sous la forme

$$\text{(Eq2)} \begin{cases} dU_s = -g(s, U_s, V_s)dC_s + V_s dM_s + dN_s \\ U_T = e^{\beta B}. \end{cases}$$

Cette EDSR (Eq2) sera notée, par la suite, EDSR$(g, e^{\beta B})$ (elle est caractérisée de façon unique par le générateur g et par la condition terminale $e^{\beta B}$).

Démarche de l'étude théorique

On résume la démarche qui est suivie par la suite pour justifier l'existence à l'EDSR(F, β, B) (de type (Eq1)) : l'idée consiste à montrer, à l'aide d'un changement de variable exponentiel (et de façon similaire à [BRI06]), un résultat de correspondance entre l'existence d'une solution pour l'EDSR(F, β, B) de type (Eq1) et l'existence d'une solution l'EDSR$(g, e^{\beta B})$ de type (Eq2). Dans un premier temps, on suppose l'existence d'une solution à la première équation. On effectue alors un changement de variable formel en posant $U = \exp(\beta Y)$ et on en déduit l'expression suivante du générateur g en fonction d'un générateur F fixé

$$g(s, u, v) = \left(\beta u F(s, \frac{\ln(u)}{\beta}, \frac{v}{\beta u}) - \frac{1}{2u}|m_s v|^2\right)\mathbf{1}_{u>0}. \tag{1.2}$$

Une fois que cette correspondance entre solutions des deux types d'EDSR est établie, cela permet de ramener l'étude de l'existence à l'EDSR(F, β, B)

de type (Eq1) à celle de l'existence pour une EDSR de type beaucoup plus simple. En effet, la forme de la partie à variation finie de l'équation de type (Eq2) ne contient plus de terme faisant intervenir le processus de variation quadratique $\langle L\rangle$. Cette EDSR (Eq2) a déjà été étudiée dans le contexte d'une filtration continue générale par [ELK97a] mais sous l'hypothèse que le générateur g est lipschitzien (par rapport à chacune des deux variables).

Hypothèses

On énonce ci-dessous les diverses hypothèses que l'on impose au générateur F de l'EDSR(F,β,B) de type (Eq1) que l'on souhaite étudier. La première série d'hypothèses concerne le contrôle de la croissance du générateur F (ces hypothèses sont valables $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s) :

$$\exists\ \bar{\alpha}\geq 0,\ \text{t.q.}\ \int_0^T \bar{\alpha}_s dC_s \leq a,\ \text{et}\ \exists\ b,\ \gamma,\ C_1>0,$$

$$\begin{cases} (H_1) & |F(s,y,z)|\leq \bar{\alpha}_s + b\bar{\alpha}_s|y| + \dfrac{\gamma}{2}|m_s z|^2, \\ \gamma \text{ satisfaisant :} & \gamma\geq|\beta|\ \text{ et : } \gamma\geq b, \\ (H_1') & |F(s,y,z)|\leq \bar{\alpha}_s + \dfrac{\gamma}{2}|m_s z|^2. \\ (H_1'') & -C_1(\bar{\alpha}_s + |m_s z|)\leq F(s,y,z)\leq \bar{\alpha}_s + \dfrac{\gamma}{2}|m_s z|^2. \end{cases}$$

On introduit une seconde hypothèse (H_2) qui concerne le contrôle des accroissements du générateur F de l'EDSR (Eq1). Afin de démontrer un résultat d'unicité pour les EDSR du type (Eq1) caractérisées par les paramètres (F,β,B), on impose les conditions suivantes sur le générateur F : on considère, d'une part, les constantes μ et C_F (cette dernière ne dépend que des paramètres associés au générateur), et d'autre part, θ un processus prévisible et c_θ une constante telle que $\int_0^T |m_s\theta_s|^2 dC_s\leq c_\theta$, (hypothèse entrainant le caractère BMO de $\theta\cdot M$) et on définit alors l'hypothèse (H_2)

comme suit :

$$
(H_2)\begin{cases}
\forall\, z \in \mathbb{R}^d,\ \forall y^1, y^2 \in \mathbb{R},\\[2mm]
(y^1 - y^2)(F(s, y^1, z) - F(s, y^2, z)) \le \mu |y^1 - y^2|^2,\\[2mm]
\exists\, \theta \text{ t.q. } \displaystyle\int_0^T |m_s\theta_s|^2 dC_s \le c_\theta,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, z^1,\ z^2 \in \mathbb{R}^d,\\[2mm]
|F(s, y, z^1) - F(s, y, z^2)|\\[2mm]
\qquad \le\ C(|m_s\theta_s| + |m_s z^1| + |m_s z^2|)|m_s(z^1 - z^2)|.
\end{cases}
$$

Afin de vérifier les hypothèses nécessaires au théorème de Girsanov, nous aurons recours à la notion de martingale BMO donnée par la définition 0.1 dans la section 0.2.3 de l'introduction. Dans le cadre d'une martingale M continue, la définition de martingale BMO (équivalente dans ce cadre) qui est utilisée dans la suite est la suivante

$$\exists\, c > 0, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau) \le c,$$

pour tout temps d'arrêt τ de la filtration $\mathcal{F}$. La norme BMO étant alors définie comme étant la plus petite constante c telle que l'inégalité précédente soit vérifiée.

On notera BMO(M) l'espace des processus Z à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont tels que $Z \cdot M$ soit une martingale BMO (pour des résultats plus précis sur la notion BMO, on renvoie le lecteur à [MEY]). Cette notion de martingale BMO est essentielle afin de vérifier l'appartenance des exponentielles stochastiques à la classe (D). D'autres critères ont été donnés pour des exponentielles de martingales discontinues notamment dans [LEP78]. L'existence de ces critères se révéle très utile quand il s'agit de justifier l'équivalence entre deux mesures de probabilité ainsi que l'emploi d'un théorème de Girsanov (pour un énoncé précis, on renvoie à [JAC]).

Remarque 1

L'hypothèse (H_1) est plus générale que $(H_1^{'})$ et $(H_1^{''})$. Nous aurons successivement besoin d'hypothèses plus simples pour établir le résultat central, i.e. le théorème d'existence. Ainsi, l'hypothèse $(H_1^{'})$ est naturellement introduite au début de la preuve de l'existence à l'aide d'un argument de troncature (en y). La dernière hypothèse fournit quant à elle une croissance au plus linéaire de la borne inférieure du générateur g. On exploitera cette condition particulière en se référant notamment à la proposition 4 de [BRI06] ou à [LEP98], afin d'établir l'existence d'une solution minimale. La construction se faisant à l'aide d'une approximation monotone, on obtient seulement une solution minimale (ou maximale) et le raisonnement à lui seul ne permet pas de garantir l'unicité de solutions (ceci contrairement au cadre Lipschitz classique où l'utilisation de la méthode itérative de Picard et d'un théorème du point fixe permet de justifier à la fois existence et unicité).

Remarque 2

• L'hypothèse précise sur le processus θ peut sembler restrictive : une condition suffisante afin de prouver l'unicité, serait de supposer uniquement que $\theta \cdot M$ est une martingale BMO. En effet, se référant aussi à [HU05], cette condition de martingale BMO est suffisante afin de pouvoir utiliser le théorème de Girsanov. Toutefois, cette condition un peu plus restrictive est nécessaire pour justifier les estimations a priori précises du lemme 2.1 énoncé dans la section qui suit. D'autre part, anticipant ici sur l'application en finance, la constante c_θ associée à ce processus sera reliée directement à l'hypothèse de bornitude du mean-variance tradeoff.

• En ce qui concerne la constante μ, on renvoie également le lecteur à l'hypothèse analogue appelée hypothèse de monotonie (par rapport à la variable y), qui a déjà été utilisée dans le cadre d'un générateur lipschitzien par rapport à sa deuxième variable z par [PAR99] ou aussi dans le cadre d'une filtration admettant des sauts par [ROY03].

• Le second contrôle dans (H_2) porte quant à lui sur les accroissements en la variable z et ce type de contrôle a déjà été exploité dans un cadre brownien dans [HU05]. Cette hypothèse sera essentielle dans la preuve de l'unicité (section 2.2.2) pour justifier qu'une exponentielle stochastique est une vraie martingale et appliquer une transformation de Girsanov.

Chapitre 2

Étude de l'EDSR quadratique

2.1 Résultats théoriques dans le cas borné

L'objet de ce chapitre consiste à établir l'ensemble des résultats théoriques concernant l'EDSR (Eq1) introduite au chapitre précédent dans le cadre de la filtration continue et sous l'hypothèse que la condition terminale B est bornée.
Avant d'énoncer les différents résultats, on donne quelques commentaires : tout d'abord, les preuves des résultats centraux que sont les théorèmes d'existence et d'unicité s'appuient sur un premier lemme fondamental. Ce lemme fournit des estimations à priori sur la norme de tout triplet de processus solution (appartenant donc à $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$). Nous l'énonçons ci-dessous pour le cas de l'EDSR (Eq1), en remarquant que cela entraine le résultat pour la seconde EDSR. Cette dernière est un cas particulier de la première EDSR (Eq1) de paramètres (F, β, B) (correspondant simplement au cas où le paramètre β est nul). Un lien précis entre les deux types d'EDSR ((Eq1) et (Eq2)) est étudié lors de la preuve du résultat d'existence.

Lemme 2.1 *On conserve les notations du chapitre précédent en considérant une EDSR de type (Eq1) de paramètres (F, β, B) et dont le générateur F vérifie (H_1). Il existe trois constantes c, C, C' qui ne dépendent que des paramètres γ, a, b (donnés par (H_1)) ainsi que de $|B|_\infty$, telles que, pour toute solution (Y, Z, L) de l'EDSR, on ait :*

$\mathbb{P}$-p.s. et pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ,

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \forall\, t,\ c \leq Y_t \leq C, \\
(ii) & \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\left(\displaystyle\int_\tau^T |m_s Z_s|^2 dC_s + \langle L\rangle_T - \langle L\rangle_\tau\right) \leq C'.
\end{array}
$$

Remarque au Lemme 2.1

Les trois constantes c, C et $C^{'}$ vont être explicitées par la suite. Le point essentiel de ce lemme est donné par l'assertion (i), assertion concernant le contrôle dans S^{∞} de toute solution de (Eq1). Ainsi, la preuve de l'assertion (ii) repose fortement sur l'existence d'un contrôle de la norme du processus Y dans S^{∞}. L'intérêt de l'assertion (ii) est le contrôle de la norme des intégrales stochastiques dans l'espace des martingales BMO. Cette propriété sera utilisée à plusieurs reprises :

1. dans la preuve de l'unicité, pour justifier le théorème de Girsanov,

2. dans la dernière étape de l'existence, ceci pour montrer la convergence forte des suites (V^n) et (N^n) dans leurs espaces de Hilbert respectifs, à savoir $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2([0,T])$.

On énonce alors ci-après les résultats principaux :

Théorème 2.1 *Supposons que l'EDSR donnée par (F,β,B) soit telle que F vérifie (H_1), alors il existe au moins une solution (Y, Z, L) à l'EDSR (Eq1) appartenant à $S^{\infty} \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$.*

On donne ci-dessous le résultat de comparaison que nous allons établir pour toute EDSR de type (Eq1) et on note que le résultat d'unicité (qui est donné comme corollaire) est un sous produit de ce résultat de comparaison.

Théorème 2.2 *On considère deux EDSR de type (Eq1) et de paramètres respectifs (F^1,β,B^1) et (F^2,β,B^2) (F^1 et F^2 satisfaisant les hypothèses (H_1) et (H_2)) et on suppose l'existence de solutions respectives (Y^1, Z^1, L^1) et (Y^2, Z^2, L^2) à chacune de ces EDSR. Si les paramètres satisfont en outre les conditions qui suivent :*
- *$\xi^1 \leq \xi^2$, $\mathbb{P}$-p.s.,*
- *$F^1(s,Y_s^1,Z_s^1) \leq F^2(s,Y_s^1,Z_s^1)$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s,*

alors, on en déduit :

$$Y_s^1 \leq Y_s^2, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.\ et\ pour\ tout\ s.$$

Corollaire 2.1 *Pour toute EDSR de type (Eq1) de paramètres (F,β,B) dont le générateur satisfait les hypothèses (H_1) et (H_2), il existe une unique solution (Y, Z, L) appartenant à $S^{\infty} \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$.*

2.2 Preuve des différents résultats

2.2.1 Estimations à priori

Preuve du lemme 2.1 Dans cette étape, on suppose connue (au moins) une solution (Y, Z, L) de l'EDSR (Eq1) dont le générateur F satisfait (H_1)) et on procède en comparant le processus U (défini par $U := e^{\gamma Y}$) à un processus adéquat. Cette démarche est analogue à celle employée dans un cadre brownien par [BRI06]. Par définition, cette solution (Y, Z, L) appartient à $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0, T])$ et, en particulier, le processus Y est borné et à trajectoires continues. Afin de justifier cette procédure et dans le but de prouver l'assertion (i), on introduit alors les processus U et V comme suit : $U_t = e^{\gamma Y_t}$, $V_t = \gamma e^{\gamma Y_t} Z_t$ ($\gamma > 0$). On applique la formule d'Itô au processus U, de sorte que U est solution de l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} dU_t = -g(t, U_t, V_t)dC_t + V_t dM_t + \gamma U_t dL_t - \frac{1}{2}\gamma U_t(\beta - \gamma)d\langle L\rangle_t, \\ U_T = e^{\gamma B}, \end{cases}$$

avec le générateur g qui a pour expression :

$$g(s, u, v) = \gamma u\Big(F(s, \frac{\ln(u)}{\gamma}, \frac{v}{\gamma u}) - \frac{\gamma}{2}|m_s \frac{v}{\gamma u}|^2\Big)\mathbf{1}_{u>0}.$$

On obtient ainsi une borne supérieure pour g qui ne dépend plus du terme quadratique $|m_s v|^2$). Désormais, on exploite la condition : $\gamma \geq |\beta|$ (donnée par (H_1)) ainsi que l'hypothèse (H_1) sur F, pour obtenir le contrôle suivant de g :

$$g(s, u, v) \leq \gamma\bar{\alpha}_s u(1 + \frac{b}{\gamma}|\ln(u)|)\mathbf{1}_{u>0}. \tag{2.1}$$

Posant dès lors : $z = B(\omega)$, lorsque cette quantité est finie (ce qui est vérifié presque sûrement), on s'intéresse à la solution ($\phi_t(z)$) de l'équation suivante :

$$\phi_t(z) = e^{\gamma z} + \int_t^T h(s, \phi_s)dC_s,$$

avec h donné par :

$$h(s, x) = \gamma\bar{\alpha}_s x(1 + \frac{b}{\gamma}\ln(x))\mathbf{1}_{x>1} + \gamma\bar{\alpha}_s\mathbf{1}_{x\leq 1}.$$

Pour $z \geq 0$, la solution $\phi(z)$ est donnée par

$$\phi_t(z) = \exp(\gamma\frac{e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u} - 1}{b})\exp(\gamma z e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u}). \tag{2.2}$$

On souhaite alors justifier le contrôle suivant, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout t ($t \in [0, T]$)

$$e^{\gamma|Y_t|} \leq \Phi_t(|B|) \text{ (et } \Phi_t(|B|) = \mathbb{E}(\phi_t(|B|)|\mathcal{F}_t))), \tag{2.3}$$

avec le processus $\Phi(|B|)$ dont l'expression est donnée (en remplaçant z par $|B|$ dans (2.2)) par :

$$\forall\, t, \quad \Phi_t(|B|) = \mathbb{E}\left(\exp(\gamma \frac{e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u} - 1}{b}) \exp(\gamma |B| e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u}) | \mathcal{F}_t \right).$$

Afin de justifier (2.3), on fixe t (t appartenant à $[0,T]$) et on commence par appliquer la formule d'Itô-Tanaka au processus $(U(s,|Y_s|))_{s\in[t,T]}$ qui est défini comme suit :

$$U(s,|Y_s|) := \exp\left(\gamma (\frac{\exp(\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u) - 1}{b}) + \gamma |Y_s| \exp(\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u) \right).$$

Avec cette définition, on remarque que : $U(t,|Y_t|) = e^{\gamma|Y_t|}$. Par souci de clarté, on commence par rappeler la formule d'Itô-Tanaka pour le processus $|Y|$

$$\begin{aligned} d|Y_s| = \;& -\mathrm{sign}(Y_s) F(s,Y_s,Z_s) dC_s - \mathrm{sign}(Y_s) \tfrac{\beta}{2} d\langle L \rangle_s + d\bar{L}_s \\ & + \mathrm{sign}(Y_s) \big(Z_s dM_s + dL_s \big), \end{aligned}$$

où $\bar{L}$ est le temps local de Y (ce processus est croissant) et on définit le processus $H := (H_s)_{s\in[t,T]}$ en posant

$$H_s := \ln(U(s,|Y_s|)) = \gamma \big(\frac{\exp(\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u) - 1}{b} \big) + \gamma |Y_s| \exp(\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u).$$

La formule d'Itô appliquée sous forme différentielle au processus $(U(s,|Y_s|))_{s\in[t,T]}$ donne :

$$d(e^{H_s}) = e^{H_s} dH_s + \frac{1}{2} e^{H_s} d\langle H \rangle_s, \quad \text{avec :} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} dH_s = \;& e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} \big(\big(\gamma \bar{\alpha}_s - \gamma \mathrm{sign}(Y_s) F(s,Y_s,Z_s) + \gamma b \bar{\alpha}_s |Y_s| \big) dC_s \big) \\ & + e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} \big(-\gamma \tfrac{\beta}{2} \mathrm{sign}(Y_s) d\langle L \rangle_s + \gamma d\bar{L}_s \big) \\ & + \gamma e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} \mathrm{sign}(Y_s) \big(Z_s dM_s + dL_s \big), \end{aligned}$$

et :

$$d\langle H \rangle_s = \gamma^2 e^{2\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} \big(|m_s Z_s|^2 dC_s + d\langle L \rangle_s \big).$$

On réécrit alors la formule donnée par (2.4) en regroupant, d'une part, tous les termes de la partie à variation finie et, d'autre part, ceux de la partie martingale locale, ce qui fournit :

$$e^{-\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u}\Big(\frac{de^{H_s}}{e^{H_s}}\Big) =$$

$$= \Big(\gamma\bar{\alpha}_s - \gamma \mathrm{sign}(Y_s)F(s,Y_s,Z_s) + \gamma b\bar{\alpha}_s|Y_s| + \tfrac{\gamma^2}{2}e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u}|m_s Z_s|^2\Big)\, dC_s$$

$$+\ \gamma d\bar{L}_s \ +\ \tfrac{\gamma}{2}\big(\gamma e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} - \beta \mathrm{sign}(Y_s)\big)d\langle L\rangle_s$$

$$+\ \gamma \mathrm{sign}(Y_s)\big(Z_s dM_s + dL_s\big).$$

On justifie désormais la positivité de l'ensemble des termes des deux premières lignes du membre de droite dans l'égalité précédente. D'une part, on a le contrôle suivant (qui provient de (H_1))

$$|\gamma \mathrm{sign}(Y_s)F(s,Y_s,Z_s)| \leq \gamma\bar{\alpha}_s + \gamma b\bar{\alpha}_s|Y_s| + \frac{\gamma^2}{2}|m_s Z_s|^2.$$

D'autre part, puisque $\bar{\alpha}$ est un processus positif et : $\gamma \geq |\beta|$, il en résulte :

$$\forall\ s \geq t,\ \begin{cases} & \big(\gamma^2 e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} - \gamma^2\big) \geq 0, \\ \text{et} & \\ & \big(\gamma e^{\int_t^s b\bar{\alpha}_u dC_u} - \beta \mathrm{sign}(Y_s)\big) \geq 0. \end{cases}$$

Le processus $U := (U(s,|Y_s|))_{s\in[t,T]}$ est donc égal à la somme d'un processus croissant et d'une martingale locale. On effectue alors une procédure de localisation : il existe une suite croissante (τ_k) de temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ telle que $(U(s\wedge\tau_k, |Y_{s\wedge\tau_k}|)$ est une sousmartingale. Il en résulte donc

$$e^{\gamma|Y_t|} = U(t,|Y_t|) \leq \mathbb{E}\big(U(T\wedge\tau_k, |Y_{T\wedge\tau_k}|)|\mathcal{F}_t\big).$$

Désormais, puisque $(U(s,|Y_s|))$ est borné (du fait des hypothèses sur les processus et, en particulier, sur $|Y|$), on justifie à l'aide du théorème de convergence bornée, le passage à la limite, lorque k tend vers $+\infty$, ce qui fournit :

$$e^{\gamma|Y_t|} \leq \mathbb{E}\big(U(T,|Y_T|)|\mathcal{F}_t\big).$$

(le terme du membre de droite coincide avec $\Phi_t(|B|)$ puisque $Y_T := B$). La majoration donnée par (2.3) est donc satisfaite et la décroissance (au sens presque sûre) de $t \to \phi_t(|B|)$ permet de déduire l'estimation suivante :

$$\mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } t, \quad |Y_t| \leq \frac{1}{\gamma}\ln\big(\mathbb{E}(\phi_0(|B|)|\mathcal{F}_t\big).$$

Enfin, puisque : $\phi_0(|B|) \leq \exp\big(\gamma(\bar{a} + |B|_\infty e^{ba})\big)$, $\mathbb{P}$-p.s. du fait des contrôles donnés par (H_1) et posant : $\bar{a} := \frac{e^{ba}-1}{b}$, l'assertion (i) du lemme 2.1 est vérifiée avec les constantes c et C données par

$$C := (\bar{a} + |B|_\infty e^{ba}) \text{ et } c := -(\bar{a} + |B|_\infty e^{ba}) \text{ (soit : } c = -C).$$

Afin de justifier l'estimation (ii), on applique la formule d'Itô au processus $\psi_\gamma(Y+m_0)$ (m_0 est une constante qui sera précisée par la suite) et on considère ψ_γ défini comme suit :

$$\psi_\gamma(x) = \frac{e^{\gamma x} - 1 - \gamma x}{\gamma^2}.$$

Cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

$$\psi_\gamma{}'(x) \geq 0, \text{ si } x \geq 0, \text{ ainsi que : } -\gamma\psi_\gamma' + \psi_\gamma'' = 1.$$

Y étant un processus borné, on pose : $m_0 := -|Y|_{S^\infty}$, ce qui entraine :

$$\mathbb{P}\text{-p.s}, \ \forall s \in [0,T], \ \ Y_s + m_0 \geq 0.$$

Considérant τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt arbitraire, on prend l'espérance conditionnelle respectivement à $\mathcal{F}_\tau$ dans la formule d'Itô intégrée entre τ et T pour $\psi_\gamma(Y+m_0)$,

$$\begin{aligned}\psi_\gamma(Y_\tau+m_0) - & \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(\psi_\gamma(Y_T+m_0)) \\ &= -\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\left(\int_\tau^T \psi_\gamma'(Y_s+m_0)(-F(s,Y_s,Z_s)dC_s - \frac{\beta}{2}d\langle L\rangle_s)\right) \\ &\quad - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\left(\int_\tau^T \psi_\gamma'(Y_s+m_0)(Z_s dM_s + dL_s)\right) \\ &\quad - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\left(\int_\tau^T \frac{\psi_\gamma''}{2}(Y_s+m_0)\big(|m_s Z_s|^2 dC_s + d\langle L\rangle_s\big)\right).\end{aligned}$$

Pour justifier que l'espérance conditionnelle du second terme du membre de droite de l'inégalité est nulle, on exploite les propriétés suivantes

- la bornitude de $\psi_\gamma'(Y+m_0)$,
- le caractère de martingale de $Z \cdot M$ et L : celui ci est assuré, car (Y,Z,L) est solution de l'EDSR et donc, de ce fait, les deux intégrales stochastiques sont de carré intégrable.

Il reste à exploiter la borne supérieure de F donnée par (H_1) et des manipulations simples pour réécrire la formule d'Itô de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\psi_\gamma(Y_\tau+m_0) & -\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\psi_\gamma(Y_T+m_0) \\ &\leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\int_\tau^T \psi_\gamma'(Y_s+m_0)(|\bar{\alpha}_s|(1+b|Y|_{S^\infty})dC_s \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\int_\tau^T (\frac{\beta}{2}\psi_\gamma' - \frac{1}{2}\psi_\gamma'')(Y_s+m_0)d\langle L\rangle_s \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\int_\tau^T (\frac{\gamma}{2}\psi_\gamma' - \frac{1}{2}\psi_\gamma'')(Y_s+m_0)|m_s Z_s|^2 dC_s.\end{aligned}$$

Les deux termes du membre de gauche ainsi que le premier du membre de droite sont bornés (ces bornes étant de surcroit indépendantes de τ, du fait de l'hypothèse d'intégrabilité de $\bar{\alpha}$). Se souvenant que $\gamma \geq |\beta|$, on obtient pour tout x, $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f_1(x) = \frac{1}{2}(-\gamma\psi_\gamma' + \psi_\gamma'')(x) = \frac{1}{2} > 0, & \qquad \text{d'une part,} \\ \frac{1}{2}(-\beta\psi_\gamma' + \psi_\gamma'')(x) = f_1(x) + \frac{1}{2}(-\beta+\gamma)\psi_\gamma'(x) \geq \frac{1}{2}, & \qquad \text{d'autre part .} \end{aligned}$$

Utilisant ces inégalités avec $x = Y_s + m_0$, quantité positive (presque sûrement), on en déduit l'existence d'une constante C' (cette constante est indépendante de τ et ne dépend seulement que des paramètres a, b, γ et $|B|_\infty$) telles que l'assertion (ii) soit satisfaite.

$\square$

2.2.2 Preuve de l'unicité

Preuve du Théorème 2.2 On applique la même procédure de linéarisation que celle employée dans [HU05] (dans le cadre brownien) afin de justifier l'emploi du théorème de Girsanov à l'aide d'un changement de probabilité adéquat.

Sous l'hypothèse que les générateurs F^1 et F^2 satisfont (H_1) et (H_2)), on suppose l'existence de deux solutions notées (Y^1, Z^1, L^1) et (Y^2, Z^2, L^2) aux EDSR de type (Eq1) et de paramètres respectifs (F^1, β, B^1) et (F^2, β, B^2). On note tout d'abord par $Y^{1,2}$ le processus défini par $Y^{1,2} := Y^1 - Y^2$ ($Z^{1,2}$ et $L^{1,2}$ étant définis de manière similaire).

On considère la semimartingale $(\tilde{Y}^{1,2})$ définie en posant, pour tout t, $\tilde{Y}^{1,2}_t = e^{2\mu C_t}|Y^{1,2}_t|^2$ et on donne ci-dessous la formule d'Itô sous forme différentielle :

$$d\tilde{Y}^{1,2}_s = 2\mu\tilde{Y}^{1,2}_s dC_s + e^{2\mu C_s} 2Y^{1,2}_s dY^{1,2}_s + \frac{1}{2} e^{2\mu C_s} 2d\langle Y^{1,2}\rangle_s.$$

Or, Y^1 et Y^2 étant des solutions de deux EDSR de type (Eq1), on a :

$$dY^{1,2}_s = -(F^1(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s))dC_s - \frac{\beta}{2} d(\langle L^1\rangle_s - \langle L^2\rangle_s) + dK_s,$$

avec : $dK = Z^{1,2}dM + dL^{1,2}$, où K représente la partie martingale. On réécrit la formule d'Itô, entre t et un temps d'arrêt τ ($t \leq \tau$), comme suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^{1,2}_t - \tilde{Y}^{1,2}_\tau = & - \int_t^\tau 2\mu\tilde{Y}^{1,2}_s dC_s \\
& + \int_t^\tau e^{2\mu C_s} 2Y^{1,2}_s (F^1(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s))dC_s \\
& + \int_t^\tau e^{2\mu C_s} 2Y^{1,2}_s \frac{\beta}{2} d\langle L^{1,2}, L^1 + L^2\rangle_s \\
& - \int_t^\tau e^{2\mu C_s} 2Y^{1,2}_s \big(Z^{1,2}_s dM_s + dL^{1,2}_s\big) \\
& - \int_t^\tau e^{2\mu C_s} \frac{1}{2} 2d\langle Y^{1,2}\rangle_s \; .
\end{aligned}$$

On procède alors au découpage suivant du premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}
F^1(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s) & = (F^1 - F^2)(s, Y^1_s, Z^1_s) \\
& \quad + F^2(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s).
\end{aligned}$$

Du fait que le premier terme est négatif ($\mathbb{P}$-p.s.), on obtient la majoration simple suivante

$$F^1(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s) \leq F^2(s, Y^1_s, Z^1_s) - F^2(s, Y^2_s, Z^2_s).$$

On applique ensuite une procédure de linéarisation au générateur F^2 qui satisfait (H_2) pour écrire :

$$\begin{aligned} & 2Y_s^{1,2}(F^2(s,Y_s^1,Z_s^1) - F^2(s,Y_s^2,Z_s^2)) \\ & \quad \leq \ 2\mu|Y_s^{1,2}|^2 + 2Y_s^{1,2}(m_s\kappa_s)'(m_sZ_s^{1,2}), \end{aligned}$$

où le processus κ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est défini par :

$$\begin{cases} \kappa_s = \dfrac{(F^2(s,Y_s^2,Z_s^1) - F^2(s,Y_s^2,Z_s^2))Z_s^{1,2}}{|m_sZ_s^{1,2}|^2}, & \text{si } \ |m_s(Z_s^{1,2})| \neq 0, \\ \kappa_s = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on définit le processus A en posant, pour tout s :

$$\begin{aligned} A_s := \ & \big(2Y_s^{1,2}(F^1(s,Y_s^1,Z_s^1) - F^2(s,Y_s^2,Z_s^2)\big) \\ & - \Big(2\mu|Y_s^{1,2}|^2 + 2Y_s^{1,2}(m_s\kappa_s)'(m_sZ_s^{1,2})\Big), \end{aligned}$$

ce dernier est alors négatif et l'expression de la formule d'Itô devient :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t^{1,2} - \tilde{Y}_\tau^{1,2} \quad & = \underbrace{\int_t^\tau A_s dC_s - \int_t^\tau e^{2\mu C_s}\frac{1}{2}2d\langle Y^{1,2}\rangle_s}_{\leq 0} \\ & + \int_t^\tau 2Y_s^{1,2}e^{2\mu C_s}(m_s\kappa_s)'(m_sZ_s^{1,2})dC_s \\ & + \int_t^\tau 2Y_s^{1,2}e^{2\mu C_s}\frac{\beta}{2}d\langle L^{1,2}, L^1+L^2\rangle_s \\ & - \int_t^\tau 2e^{2\mu C_s}Y_s^{1,2}Z_s^{1,2}dM_s - \int_t^\tau 2e^{2\mu C_s}Y_s^{1,2}dL_s^{1,2} \end{aligned}$$

On considère alors les intégrales stochastiques :

$$\begin{aligned} & N = \big(2e^{2\mu C}Y^{1,2}Z^{1,2}\big)\cdot M, \ \text{et} \ \ \bar{N} = \kappa \cdot M, && \text{d'une part, et} \\ & L = \big(2Y^{1,2}e^{2\mu C}\big)\cdot L^{1,2}, \ \text{et} \ \ \bar{L} = \frac{\beta}{2}(L^1+L^2), && \text{d'autre part.} \end{aligned}$$

Si on définit la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ en posant :

$$d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(\kappa\cdot M + \frac{\beta}{2}(L^1+L^2))d\mathbb{P},$$

il résulte du théorème de Girsanov que le processus :

$$N + L - \langle N+L, \kappa\cdot M + \frac{\beta}{2}(L^1+L^2)\rangle,$$

est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$. En effet, se basant sur (H_2), on obtient le contrôle suivant :

$$|m_s\kappa_s| \leq C(|m_s\theta_s| + |m_sZ_s^1| + |m_sZ_s^2|),$$

ce qui permet d'affirmer que : $\kappa \cdot M + \frac{\beta}{2}(L^1 + L^2)$ est une martingale BMO, grâce à l'estimation (ii) donnée dans le Lemme 2.1 ainsi qu'à l'hypothèse d'intégrabilité de θ donnée par (H_2). On se réfère ici aux résultats donnés dans [KAZ] pour conclure que l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\kappa \cdot M + \frac{\beta}{2}(L^1 + L^2))$ est une densité de martingale. La formule d'Itô se réécrit donc, entre t et τ, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t^{1,2} - \tilde{Y}_\tau^{1,2} \quad &= \int_t^\tau A_s dC_s - \int_t^\tau e^{2\mu C_s} \frac{1}{2} 2d\langle Y^{1,2}\rangle_s \\ - \int_t^\tau d(N_s - \langle N_s, \bar{N}_s\rangle + L_s - \langle L_s, \bar{L}_s\rangle).\end{aligned}$$

On utilise alors une procédure classique de localisation : il existe une suite (τ^m) de temps d'arrêt telle que le processus suivant : $N - \langle N, \bar{N}\rangle + L - \langle L, \bar{L}\rangle$ (arrêté en τ^m) est une vraie martingale (la suite (τ^m) qui converge vers T est prise telle que : $t \leq \tau^m \to T$). Prenant désormais l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ sous la mesure $\mathbb{Q}$ dans la formule d'Itô prise entre t et τ^m, on obtient :

$$\tilde{Y}_t^{1,2} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{Y}_{\tau^m}^{1,2} | \mathcal{F}_t).$$

Appliquant le théorème de convergence bornée à la suite $(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{Y}_{\tau^m}^{1,2} | \mathcal{F}_t))$ lorsque m tend vers $+\infty$, on peut conclure :

$$\forall\, t,\ \tilde{Y}_t^{1,2} \leq B^1 - B^2 \leq 0\ \ \mathbb{Q}\text{-p.s.} \quad (\text{et } \ \mathbb{P}\text{-p.s, du fait de l'équivalence entre } \mathbb{P} \text{ et } \mathbb{Q}).$$

Pour conclure et prouver le résultat du corollaire 2.1 (à savoir l'unicité), il suffit de remarquer que, lorsque les paramètres des EDSR coincident, à savoir : $F^1 = F^2$ et $B^1 = B^2$, alors le raisonnement précédent s'applique aussi bien pour $Y^{1,2}$ et $Y^{2,1}$, ce qui entraine donc : $Y_t^1 = Y_t^2$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout t.

$\square$

2.2.3 Preuve du résultat d'existence

Dans cette partie et afin d'établir le résultat d'existence énoncé au théorème 2.1, nous allons découper la preuve en trois étapes.

Dans une première étape, on justifie qu'il est équivalent de montrer l'existence sous une nouvelle hypothèse plus simple notée $(H_1^{'})$ sur le générateur F de l'EDSR(F, β, B) ou de la montrer sous l'hypothèse (H_1).

Dans une seconde étape, on introduit, par l'intermédiaire d'un calcul formel, une EDSR intermédiaire de la forme (Eq2). L'objectif consiste alors à établir une correspondance entre l'existence de solutions à l'EDSR(F, β, B) de type (Eq1) et à celle de type (Eq2) caractérisée par $(g, e^{\beta B})$ (où l'expression de g est donnée en fonction de F par (1.2)). Cette correspondance est établie lorsque le générateur F de la première EDSR satisfait $(H_1^{'})$. Ceci permet de justifier a posteriori le changement de variable ayant conduit à l'EDSR du type (Eq2) et d'exprimer une solution de l'EDSR(F, β, B) en fonction d'une solution de l'EDSR$(g, e^{\beta B})$ de type (Eq2).

La dernière étape consiste alors à construire une solution à l'EDSR$(g, e^{\beta B})$ de type (Eq2) et dont le générateur g satisfait $(H_1^{'})$, ce qui permet via le résultat de correspondance établi à l'étape 2 de conclure au théorème 2.1.

- **Étape 1 : Troncature en la variable y**

On utilise les estimations du lemme 2.1 afin de simplifier les hypothèses sur le générateur F de l'EDSR(F, β, B) de type (Eq1). Le but de cette étape est de se restreindre à l'hypothèse suivante notée $(H_1^{'})$

$$(H_1^{'}) \quad \exists \bar{\alpha} \ \geq 0 \ \int_0^T \bar{\alpha}_s dC_s \leq \tilde{a} \ (\tilde{a} > 0), \ \ |F(s,y,z)| \leq \bar{\alpha}_s + \frac{\gamma}{2}|m_s z|^2.$$

Supposons dès lors possible la construction d'une solution de l'EDSR (Eq1) sous $(H_1^{'})$ et expliquons alors comment en déduire la construction sous (H_1). F satisfaisant (H_1) avec les paramètres a, b et γ, on définit K en posant : $K = |c| + |C|$ (les constantes c et C sont données par l'assertion (i) du Lemme 2.1), et on introduit l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} dY_s^K = -F^K(s, Y_s^K, Z_s^K)dC_s - \frac{\beta}{2} d\langle L^K \rangle_s + Z_s^K dM_s + dL_s^K, \\ Y_T^K = B, \end{cases}$$

où on a posé : $F^K(s,y,z) = F(s, \rho_K(y), z)$ et où la fonction troncature ρ_K est définie comme suit :

$$\rho_K(x) = \begin{cases} -K & \text{si } x < -K, \\ x & \text{si } |x| \leq K, \\ K & \text{si } x > K, \end{cases}$$

ce qui conduit donc au contrôle suivant :

$$\forall \ s, \forall y \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{R}^d, \ |F^K(s,y,z)| \leq \bar{\alpha}_s(1 + b|\rho_K(y)|) + \frac{\gamma}{2}|m_s z|^2.$$

Puisque $|\rho_K(x)| \leq |x|$, F^K satisfait encore (H_1) avec les mêmes paramètres que F. Pour toute solution (Y^K, Z^K, L^K) de l'EDSR caractérisée par (F^K, β, B), K est un majorant de la norme de Y^K dans S^∞. D'autre part, F^K satisfait $(H_1^{'})$, quitte à remplacer le processus $\bar{\alpha}$ par un nouveau processus $\tilde{\alpha}$ défini, pour tout s, par : $\tilde{\alpha}_s := \bar{\alpha}_s(1+bK)$. Ce processus $\tilde{\alpha}$ satisfait la même hypothèse d'intégrabilité que $\bar{\alpha}$ (à savoir : $\displaystyle\int_0^T \tilde{\alpha}_s dC_s \leq \tilde{a}(1+bK) < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.).
Ceci justifie que, par abus et dans toute la suite, on conserve la notation $\bar{\alpha}$ prise dans l'hypothèse (H_1).

L'EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F^K, β, B) est telle que F^K satisfait $(H_1^{'})$: du fait de l'hypothèse initiale faite dans cette étape, il existe au moins une solution notée (Y^K, Z^K, L^K) de cette EDSR. La condition $|Y^K| \leq K$ étant clairement établie, F^K et F coincident le long des trajectoires de cette solution, ce qui entraine que (Y^K, Z^K, L^K) est aussi une solution de l'EDSR (Eq1) caracterisée par (F, β, B).

- **Étape 2 : l'EDSR intermédiaire**

On veut désormais justifier que, si on sait construire une solution (U, V, N) à l'EDSR de type (Eq2) et de paramètres (g, $e^{\beta B}$) avec g satisfaisant (H_1), on est en mesure de définir une solution (Y, Z, L) de l'EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F, β, B) en posant :

$$Y := \frac{\ln(U)}{\beta}, \; Z := \frac{V}{\beta U}, \; \text{et} \; L := \frac{1}{\beta U} \cdot N. \tag{2.5}$$

Afin de mettre en évidence le lien entre les solutions respectives aux deux EDSR précédemment évoquées, on en donne une justification formelle : on suppose connue une solution (Y, Z, L) à l' EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F, β, B) et on définit alors le processus U en posant : $U = e^{\beta Y}$. D'après la formule d'Itô, le processus U satisfait l'équation :

$$(1.2) \begin{cases} dU_s = -g(s, U_s, V_s)dC_s + V_s dM_s + dN_s \\ U_T = e^{\beta B}, \end{cases}$$

avec V et N définis par : $V = \beta U Z$, $N = \beta U \cdot L$, de sorte que $V \cdot M + N$ correspond à la partie martingale de l'EDSR satisfaite par U, dont le générateur g a pour expression (en fonction de F) :

$$g(s, u, v) = \beta u F(s, \frac{\ln(u)}{\beta}, \frac{v}{\beta u}) - \frac{1}{2u}|m_s v|^2.$$

La difficulté désormais est de donner un sens aux relations données par (2.5) et, pour ce faire, on commence par démontrer l'existence d'estimations précises de la norme du processus U dans S^∞, pour toute solution (U, V, N)

de l'EDSR (Eq2) caractérisée par (g, $e^{\beta B}$). Ceci n'est pas possible directement du fait de la singularité de g en la variable u et justifie donc l'introduction d'une nouvelle EDSR (plus particulièrement d'un nouveau générateur G, défini à partir de g à l'aide d'une troncature adéquate). On résume l'objectif de cette démarche : il s'agit de prouver que, sous l'hypothèse que le générateur F de l'EDSR (Eq1) satisfait $(H_1^{'})$, le générateur G de la nouvelle EDSR de paramètres $(G, e^{\beta B})$ (et de type (Eq2)) satisfait (H_1). Utilisant alors le lemme 2.1, il est possible de donner des estimations précises, afin de conclure que toute solution de cette nouvelle EDSR caractérisée par (G, $e^{\beta B}$) est aussi solution de l'EDSR donnée par (g, $e^{\beta B}$).

On définit G comme suit (avec c^1 et c^2 des constantes positives, dont les expressions seront précisées plus tard)

$$G(s,u,v) = \beta\rho_{c^2}(u)F(s, \frac{\ln(u \vee c^1)}{\beta}, \frac{v}{\beta(u \vee c^1)}) - \frac{1}{2(u \vee c^1)}|m_s v|^2,$$

où la définition de la fonction de troncature ρ_{c^2} est identique à celle de l'étape 1. Puisque F satisfait $(H_1^{'})$, on peut écrire

$$|G(s,u,v)| \leq (|\beta||u| \wedge c^2)(\bar{\alpha_s} + \frac{\gamma|m_s v|^2}{2|\beta c^1|^2}) + \frac{|m_s v|^2}{2c^1} \leq |\beta|\bar{\alpha_s}u + \frac{\hat{\gamma}}{2}|m_s v|^2,$$

avec $\hat{\gamma} = \frac{\gamma c^2}{|\beta||c^1|^2} + \frac{1}{c^1}$ et $\tilde{\beta} = |\beta|\bar{\alpha}$. Par conséquent, G satisfait (H_1) avec les paramètres (toujours notés a, b et γ) :

$$a := |\tilde{\beta}|_{L^1(dC)},\ b := 1,\ \gamma := \hat{\gamma}.$$

Grâce à l'estimation (i) du lemme 2.1, on obtient l'estimation ci-dessous, pour toute solution notée $(U^{c^1,\, c^2},\ V^{c^1,\, c^2},\ N^{c^1,\, c^2})$ de l'EDSR donnée par (G, $e^{\beta B}$) :

$$U_s^{c^1,\, c^2} \leq e^a - 1 + |e^{\beta B}|_\infty e^a,\ \mathbb{P}\text{ -p.s. et pour tout } s.$$

Ceci justifie de définir c^2 par l'expression suivante $c^2 := e^a - 1 + |e^{\beta B}|_\infty e^a$. Il est intéressant de constater l'indépendance vis à vis du paramètre γ.

Reste à montrer pourquoi pour toute solution $(U^{c^1,\, c^2},\ V^{c^1,\, c^2},\ N^{c^1,\, c^2})$ le processus U^{c^1, c^2} possède un minorant strictement positif. Soit (U, V, N) une solution de l'EDSR caractérisée par (G, $e^{\beta B}$). On définit le processus adapté $\bar{U}$ pour tout t par $\bar{U}_t = e^{-\int_0^t \tilde{\beta}_s dC_s} U_t$ (avec : $\tilde{\beta} = |\beta|\bar{\alpha}$ sign(U_s), $\tilde{\beta}$ dans $L^1(dC)$). On applique la formule d'Itô (sous forme intégrée entre t et T) à ce processus Z :

$$\bar{U}_t - \bar{U}_T = $$
$$\int_t^T \big(e^{-\int_0^s \tilde{\beta}_u dC_u}(G(s,U_s,V_s) + \tilde{\beta}_s U_s)\big)dC_s - \int_t^T e^{-\int_0^s \tilde{\beta}_u dC_u}(V_s dM_s + dN_s).$$

Comme : $G(s,U_s,V_s) \geq -(\tilde{\beta}_s U_s + \frac{\gamma}{2}|m_s V_s|^2)$, on a :

$$\bar{U}_t - \bar{U}_T \geq -\int_t^T \frac{\gamma}{2} e^{-\int_0^s \tilde{\beta}_u dC_u} |m_s V_s|^2 dC_s$$

$$-\int_t^T \left(e^{-\int_0^s \tilde{\beta}_u dC_u}(V_s dM_s + dN_s)\right).$$

Introduisant alors la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ en posant $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\frac{\gamma}{2} V \cdot M)$, la transformée de Girsanov $\tilde{M} = M + \frac{\gamma}{2}\langle V \cdot M, M\rangle$ est alors une martingale locale sous $\mathbb{Q}$. Ceci se justifie par le fait que le processus $V \cdot M$ est une martingale BMO (grâce à l'estimation (ii) du lemme 2.1). Réécrivant alors l'inégalité précédente sous la forme :

$$\bar{U}_t - \bar{U}_T \geq -\int_t^T \left(e^{-\int_0^s \tilde{\beta}_u dC_u}(V_s d\tilde{M}_s + dN_s)\right),$$

et exploitant le fait que $V \cdot \tilde{M} + N$ est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$, on obtient, dans un premier temps et à l'aide d'une localisation, l'existence d'une suite de temps d'arrêt (τ^k) que $\bar{U}_{\tau^k} \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\bar{U}_T|\mathcal{F}_{\tau^k})$. Par simple passage à la limite en k, il en résulte :

$$\bar{U}_t \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t}(\bar{U}_T),$$

ou autrement dit : $U_t \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t}\left(\left(\inf U_T\right) e^{-\int_t^T \tilde{\beta}_s dC_s}\right)$. On définit alors c^1 par la formule suivante : $c^1 := e^{-|\beta|(|B|_\infty + a)}$, ce qui fournit une borne inférieure strictement positive pour U. Avec ces choix pour c^1, c^2, le générateur G satisfait (H_1) et donc, pourvu qu'il existe une solution $(U,\ V,\ N)$, cette dernière satisfait :

$$c^1 \leq U_s \leq c^2, \ \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

On obtient donc : $G(s,U_s,V_s) = g(s,U_s,V_s)$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s. Toute solution $(U,\ V,\ N)$ de l'EDSR de paramètres $(G, e^{\beta B})$ est donc aussi une solution de l'EDSR caractérisée par $(g,\ e^{\beta B})$.

Tout processus U ainsi construit (et solution de l'EDSR$(G, e^{\beta B})$) est strictement positif et borné, on peut définir le triplet $(Y,\ Z,\ L)$ via les formules (2.5) : ceci fournit dès lors une solution de l'EDSR(F, β, B) de type (Eq1) .

- **Étape 3 : Approximation de l'EDSR intermédiaire** Afin de conclure pour l'existence d'une solution à l'EDSR (Eq1) sous (H_1), les deux étapes précédentes montrent qu'il suffit de construire une solution à l'EDSR (Eq2) sous $(H_1^{'})$. Dans ce qui suit, on s'attache à construire "explicitement" une suite de processus $(U^n,\ V^n,\ N^n)$, solutions des EDSR données par les paramètres $(g^n,\ \tilde{B}^n)$ avec la suite $\tilde{B}^n$ qui converge vers $\tilde{B} := e^{\beta B}$ et telle que la suite (U^n) soit monotone. On s'appuie alors sur un résultat classique de comparaison (une référence dans un cadre un peu plus général est donnée par le théorème 0.3 de l'introduction) pour construire une suite monotone (g^n) de générateurs lipschitziens et telle que la suite converge localement uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et pour tout s vers g. De ce fait, on aura à la fois existence et unicité de solutions. Enfin et de façon analogue à [KOB], il ne restera plus qu'à établir un résultat de convergence forte pour les suites (V^n) et (N^n), ceci dans le but de justifier un résultat dit de "stabilité" similaire au lemme de l'introduction 0.2 (ce dernier permettant de conclure à la convergence vers une solution de l'EDSR de paramètres $(g, e^{\beta B})$).

Afin de résoudre l'EDSR (Eq2) donnée par $(g,\ \tilde{B} = e^{\beta B})$, on commence par supposer que g satisfait la condition $(H_1^{''})$ et avec $C_1 = 0$ (plus restrictive que $(H_1^{'})$). Dès lors, on peut procéder par inf-convolution en définissant g^n, pour tout entier n, comme suit :

$$g^n(s,u,v) = \inf_{u',v'} \left(g(s,u',v') + n|u-u'| + n|m_s(v-v')| \right).$$

Pour assurer la mesurabilité, la borne inférieure est prise sur l'espace dénombrable $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^d$. Ceci étant posé, g^n est bien définie, lipschitzien par rapport aux variables u et v, au sens où :

$$|g^n(s,u^1,v^1) - g^n(s,u^2,v^2)| \leq n|u^1-u^2| + n|m_s(v^1-v^2)|. \tag{2.6}$$

Puisque la suite (g^n) est croissante et qu'elle converge localement et simplement vers g (pour s fixé), le théorème de Dini entraine la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Comme de plus, $0 \leq g^n \leq g$ et que g satisfait $(H_1^{''})$ avec le processus $\bar{\alpha}$, on a le contrôle uniforme suivant :

$$\sup_n |g^n(s,0,0)| \leq \bar{\alpha}_s. \tag{2.7}$$

L'existence et l'unicité de solutions aux EDSR de paramètres $(g^n,\ \tilde{B}^n)$ résultent donc de ces deux conditions (2.6) et (2.7) sur les générateurs, et de l'utilisation d'arguments classiques (on renvoie le lecteur à [PAR90] ou aussi à [ELK97a], pour des résultats dans une filtration générale) : ces solutions classiques sont à priori définies sur l'espace $S^2 \times L^2(d\langle M\rangle \times d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$, avec la définition suivante de l'espace S^2 :

$$|U|_{S^2} = \mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,T]} |U_t|^2 \big)^{\frac{1}{2}}.$$

Afin de conclure à la croissance de la suite (U^n), on utilise alors un résultat de comparaison analogue au théorème 2.2 de [ELK97c]) valable pour des EDSR dont les générateurs sont lipschitziens. D'autre part, il résulte du lemme ci-dessous que U^n appartient à S^∞ pour tout n.

Lemme 2.2 *Soit* $(U^n,\ V^n,\ N^n)$ *une solution de l'EDSR (Eq2) donnée par* $(g^n,\ \tilde{B}^n)$*, et telle que le générateur* g^n *soit* L_n*-Lipschitz et de condition terminale* $\tilde{B}^n$ *(supposée bornée indépendamment de* n*). On a l'estimation suivante :*

$$\exists\ K(L_n,T)>0,\quad |U_t^n|^2 \le K(L_n,T)\mathbb{E}\left(|\tilde{B}^n|^2 + (\int_0^T |g^n(s,0,0)|dC_s)^2|\mathcal{F}_t\right). \tag{2.8}$$

On donne ci-dessous une preuve adaptée au contexte d'étude de ce résultat (ce dernier est une généralisation de la Proposition 2.1 dans [BRI00]).

Preuve du lemme 2.2 On note que, contrairement au lemme 2.1, on ne suppose pas a priori que U^n appartient à S^∞. On écrit la formule d'Itô sous forme différentielle pour le processus $(e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2)$, où Γ désigne une constante positive à déterminer.

$$d(e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2) = \Gamma e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2 dC_t + e^{\Gamma C_t}\big(2U_t^n dU_t^n + d\langle U^n\rangle_t\big), \tag{2.9}$$

avec, d'autre part ;

$$\begin{aligned}2U_t^n dU_t^n + d\langle U^n\rangle_t := &-2U_t^n g^n(t,U_t^n,V_t^n)dC_t + |m_t V_t^n|^2 dC_t + d\langle N^n\rangle_t\\ &+ 2U_t^n\big(V_t^n dM_t + dN_t^n\big).\end{aligned}$$

Puisque (U^n,V^n,N^n) est défini sur $S^2\times L^2(d\langle M\rangle\times d\mathbb{P})\times\mathcal{M}^2([0,T])$, le processus K défini comme suit

$$\forall\ s\in[0,T],\quad K_s := \int_0^s e^{\Gamma C_u}U_u^n\big(V_u^n dM_u + dN_u^n\big), \tag{2.10}$$

est une vraie martingale. Désormais, on fixe t ($t\in[0,T]$) et on réécrit la formule d'Itô (2.9) en intégrant entre t et T (et en rassemblant tous les termes qui sont des intégrales respectivement à dC)

$$\begin{aligned}e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2 - e^{\Gamma C_T}|U_T^n|^2 \;=\; &\int_t^T e^{\Gamma C_u}U_u^n\big(-\Gamma U_u^n + 2g^n(u,U_u^n,V_u^n)\big)dC_u\\ &-\int_t^T e^{\Gamma C_u}\big(|m_u V_u^n|^2 dC_u + d\langle N^n\rangle_u\big) - \big(K_T - K_t\big)\end{aligned}$$

On exploite désormais la condition de Lipschitz imposée au générateur g^n pour écrire, d'une part,

$$2|U_u^n||g^n(u,U_u^n,V_u^n)| \le 2|U_u^n||g^n(u,0,0)| + 2L_n\big(|U_u^n|^2 + |U_u^n||m_u V_u^n|\big),$$

et, d'autre part, on utilise la relation : $|2L_n ab| \leq (2(L_n)^2 a^2 + \frac{1}{2}b^2)$, pour obtenir

$$2L_n|U_u^n||m_u V_u^n| \leq 2(L_n)^2|U_u^n|^2 + \frac{1}{2}|m_u V_u^n|^2.$$

Regroupant les deux inégalités précédentes et posant : $\Gamma = 2((L_n)^2 + L_n)$, ceci permet d'affirmer :

$$\begin{aligned} e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2 &\leq e^{\Gamma C_T}|U_T^n|^2 \\ &\quad + \int_t^T e^{\Gamma C_u}\big(2|U_u^n||g^n(u,0,0)| + \frac{1}{2}(|m_u V_u^n|^2)\big)dC_u. \\ &\quad - \int_t^T e^{\Gamma C_u}\big(|m_u V_u^n|^2 dC_u + d\langle N^n\rangle_u\big) - \big(K_T - K_t\big). \end{aligned}$$

Désormais, prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ dans l'inégalité ci-dessus, l'espérance conditionnelle de la partie martingale $K_T - K_t$ (K étant défini par (2.10)) s'annule et on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big(\int_t^T e^{\Gamma C_u}\big(|m_u V_u^n|^2 dC_u + \langle N\rangle_u\big)|\mathcal{F}_t\big) \\ &\qquad \leq 2\left(\mathbb{E}\big(e^{\Gamma C_T}|U_T|^2 + 2\int_t^T e^{\Gamma C_u}|U_u^n||g^n(u,0,0)|dC_u|\mathcal{F}_t\big)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

On revient à la formule d'Itô exprimée entre t et T pour le processus $e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2$ et on prend le supremum pour obtenir

$$\begin{aligned} \sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2 &\leq e^{\Gamma C_T}|U_T^n|^2 \\ &\quad + 2\int_t^T e^{\Gamma C_u}|U_u^n||g^n(u,0,0)|dC_u \ + 4\sup_{t\leq u\leq T}|K_u - K_t|. \end{aligned}$$

On exploite alors l'inégalité de BDG (appliquée au supremum de la martingale K de carré intégrable) ainsi que la relation $Cab \leq \frac{C^2}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, afin d'en déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2|\mathcal{F}_t\right) &\leq \mathbb{E}\left(e^{\Gamma C_T}|U_T^n|^2 + 2\int_t^T e^{\Gamma C_u}|U_u^n||g^n(u,0,0)|dC_u|\mathcal{F}_t\right) \\ &\quad + \tfrac{C^2}{2}\mathbb{E}\big(\int_t^T e^{\Gamma C_u}\big(|m_u V_u^n|^2 dC_u + d\langle N\rangle_u\big)|\mathcal{F}_t\big) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(\sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2|\mathcal{F}_t\big) \end{aligned}$$

Combinant cette dernière inégalité avec (2.11), on en déduit (quitte à modifier la constante C)

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2 + \int_t^T e^{\Gamma C_u}\left(|m_u V_u^n|^2 dC_u + d\langle N\rangle_u\right)|\mathcal{F}_t\right)$$
$$\leq C\mathbb{E}\left(e^{\Gamma C_T}|U_T^n|^2 + \int_t^T e^{\Gamma C_u}|U_u^n||g^n(u,0,0)|dC_u|\mathcal{F}_t\right)$$

Pour obtenir la majoration (2.8), on utilise désormais le contrôle suivant du dernier terme de l'inégalité précédente

$$C\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\Gamma C_u}|U_u^n||g^n(u,0,0)|dC_u|\mathcal{F}_t\right)$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2|\mathcal{F}_t\right) + \tfrac{C^2}{2}\mathbb{E}\left(\left(\int_t^T e^{\frac{\Gamma}{2}C_u}|g^n(u,0,0)|dC_u\right)^2|\mathcal{F}_t\right).$$

On conclut alors grâce à l'inégalité : $e^{\Gamma C_t}|U_t^n|^2 \leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq u\leq T} e^{\Gamma C_u}|U_u^n|^2|\mathcal{F}_t\right)$.
Puis, on utilise le contrôle suivant : $|g^n(u,0,0)| \leq \bar{\alpha}_u$, avec $\bar{\alpha}$ satisfaisant $\int_0^T \bar{\alpha}_s dC_s \leq a < \infty$, ainsi que la bornitude de la variable U_T^n.

$\square$

Désormais, puisque chaque générateur g^n satisfait $(H_1^{''})$ et donc a fortiori (H_1) (avec les mêmes paramètres), on exploite l'estimation (i) du lemme 2.1, qui est valable pour toute solution de l'EDSR (Eq2) et de paramètres $(g^n,\ \tilde{B}^n)$. On se sert de plus de la condition suivante :

$$0 \leq g^n(s,u,v) \leq g(s,u,v) \quad (\mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s),$$

pour conclure à la bornitude uniforme de la suite (U^n) dans S^∞.

Pour conclure dans le cas où g satisfait seulement $(H_1^{'})$, on procède par une double approximation en introduisant alors les fonctions $(g^{n,\,p})$ comme suit :

$$g^{n,p}(s,u,v) = \operatorname{ess\,inf}_{u',v'}\left(g^+(s,u',v') + n|u-u'| + n|m_s(v-v')|\right)$$
$$-\operatorname{ess\,inf}_{u',v'}\left(g^-(s,u',v') + p|u-u'| + p|m_s(v-v')|\right).$$

Afin d'obtenir une solution à l'EDSR (Eq2) de paramètres $(g, \tilde{B})$, on procède en justifiant deux passages à la limite successifs : le processus U (associée au triplet solution (U, V, N)) est alors donné (comme une limite au sens presque sûre) par :

$$U_s = \lim_n \nearrow (\lim_p \searrow U_s^{n,p}), \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

(on précise toutefois que, dans ce cadre, il n'est plus possible de parler de solution minimale ou maximale).

La justification restant la même pour les deux passages à la limite, on suppose désormais et dans toute la suite, que g satisfait $(H_1^{''})$. Comme, d'une part, la suite (U^n) est croissante, on a existence du processus défini par : $\tilde{U} = \lim_n \nearrow (U^n)$. D'autre part, puisque les générateurs g^n satisfont $(H_1^{'})$ (et donc a fortiori (H_1)), avec les mêmes paramètres et si on se réfère à nouveau à l'estimation (ii) du lemme 2.1, on obtient :

$$\exists\, C^{'} > 0,\ \sup_{n\geq 0} \left(\mathbb{E}\big(\int_0^T |m_s V_s^n|^2 dC_s\big) + \mathbb{E}(|N_T^n|^2) \right) \leq C^{'}.$$

Par conséquent, il existe des sous suites de (V^n) et (N_T^n) (sous suites toujours notées par abus (V^n) et (N_T^n)) telles que $V^n \xrightarrow{w} \tilde{V}$ (dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$), et $N_T^n \xrightarrow{w} \tilde{N}_T$ dans $L^2(\mathcal{F}_T)$. Posant pour tout t, $\tilde{N}_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\tilde{N}_T)$, on en déduit la convergence (faible) dans $\mathcal{M}^2([0,T])$ de N^n vers $\tilde{N}$. Toutefois, afin de justifier le passage à la limite dans les EDSR données par $(g^n, \tilde{B}^n)$, il faut prouver la convergence forte (éventuellement le long de sous suites) de (V^n) et (N^n) dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2([0,T])$ vers $\tilde{V}$ et $\tilde{N}$. On laisse de côté pour l'instant la preuve de cette convergence qui sera établie dans la section 2.3 et qui constitue le point délicat du lemme ci-dessous (ce lemme établit un résultat appelé résultat de stabilité).

Lemme 2.3 *On considère l'EDSR (Eq2) ayant pour paramètres $(g, \tilde{B})$. On suppose que les suites $(g^n)_n$ et $(\tilde{B}^n)$ satisfont les conditions suivantes :*
-Pour tout s, la suite de fonctions $(g^n : (u,v) \to g^n(s,u,v))$ converge en croissant vers g $(g : (u,v) \to g(s,u,v))$,
-Pour tout n, g^n satisfait $(H_1^{''})$ avec les mêmes paramètres $\bar{\alpha}, \gamma$ (indépendants de n).
-la suite $(\tilde{B}^n)$ de variables $\mathcal{F}_T$-mesurables et uniformément bornées converge (en croissant) $\mathbb{P}$-p.s. vers $\tilde{B}$.
Ceci entraine les résultats suivants :
- *Toute suite de solutions (U^n, V^n, N^n) aux EDSR de paramètres $(g^n, \tilde{B}^n)$ est telle que (U^n) est croissante et uniformément bornée dans S^∞ et cette suite converge dans $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$ vers le triplet $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{N})$.*

• *Ce triplet* $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{N})$ *appartient à* $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$ *et satisfait l'EDSR* (*Eq2*) *de paramètres* $(g,\ \tilde{B})$.

Fin de la preuve de l'existence On suppose connu pour l'instant le résultat délicat énoncé dans le lemme 2.3, à savoir le résultat de convergence forte des suites (V^n) et (N^n) dans leurs espaces de Hilbert respectifs. On identifie alors le triplet de processus $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{N})$ en tant que solution à l'EDSR (Eq2) de paramètres $(g,\ \tilde{B})$. Pour ce faire, il suffit de justifier le passage à la limite dans les EDSR suivantes de paramètres $(g^n, \tilde{B}^n)$:

$$U_t^n = \tilde{B}^n + \int_t^T g^n(s, U_s^n, V_s^n)dC_s - \int_t^T V_s^n dM_s + N_t^n - N_T^n.$$

Cela revient à prouver les assertions suivantes :
(i) $V^n \to \tilde{V}$ dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$, lorsque $n \to \infty$,
(ii) $N^n \to \tilde{N}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T])$, lorsque $n \to \infty$,
(iii) $\mathbb{E}\int_0^T |g^n(s, U_s^n, V_s^n) - g(s, \tilde{U}_s, \tilde{V}_s)|dC_s \to 0$, lorsque $n \to \infty$.
La preuve des assertions (i) et (ii) résulte simplement de la convergence forte des suites (V^n) et (N^n) dans leurs espaces respectifs de Hilbert, ce qui entraine la convergence au sens presque sûre de ces deux suites, quitte à prendre une sous suite. Afin de prouver l'assertion (iii), il faut justifier une convergence dans $L^1(dC_s \otimes d\mathbb{P})$. Pour ce faire, on va prouver les deux assertions qui suivent :
• la convergence en $dC_s \otimes d\mathbb{P}$ mesure de $(g^n(s, U_s^n, V_s^n))$ vers $g(s, \tilde{U}_s, \tilde{V}_s)$
• le contrôle uniformément intégrable de la suite $(g^n(s, U_s^n, V_s^n))_n$
Pour le premier point, on exploite, d'une part, la convergence en $dC_s \otimes d\mathbb{P}$ mesure de (mV^n) vers $m\tilde{V}$ et celle de (U^n) vers $\tilde{U}$, et d'autre part, le fait que la suite $((u,v) \to g^n(s,u,v))$ satisfait une propriété de convergence presque sûre et localement uniforme sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Ceci permet de conclure à la convergence en $dC_s \otimes d\mathbb{P}$ mesure souhaitée. Pour le second point, on rappelle, d'une part, le contrôle suivant de la suite $(g^n(s, U_s^n, V_s^n))$:

$$\exists\ \bar{\alpha},\ \bar{\alpha} \geq 0 \text{ et } \int_0^T \bar{\alpha}_s dC_s \leq a,\ |g^n(s, U_s^n, V_s^n)| \leq \bar{\alpha}_s + \frac{\gamma}{2}|m_s V_s^n|^2.$$

(ce contrôle est vérifié, puisque g^n satisfait $(H_1^{''})$ et donc a fortiori $(H_1^{'})$ quitte à modifier $\bar{\alpha}$). D'autre part, la convergence forte dans $L^1(dC_s \otimes d\mathbb{P})$ de $|m(V^n - \tilde{V})|^2$ vers 0 entraine l'uniforme intégrabilité de la suite $(|mV^n|^2)$, ce qui assure que l'assertion (iii) est satisfaite. Le passage à la limite dans les EDSR de paramètres $(g^n, \tilde{B}^n)$ (lorsque $n \to \infty$) est bien justifié et il permet d'affirmer que le triplet satisfait

$$\tilde{U}_t = \tilde{B} + \int_t^T g(s, \tilde{U}_s, \tilde{V}_s)dC_s - \int_t^T \tilde{V}_s dM_s - (\tilde{N}_T - \tilde{N}_t),$$

et le triplet $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{N})$ est solution de l'EDSR (Eq2) de paramètres $(g,\ \tilde{B})$. D'autre part, $\tilde{U}$ étant un processus continu, il vient par application du lemme de Dini :

$$\lim_p (\sup_t |\tilde{U}_t - U^p_t|) = 0,\ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Lorsqu'on applique alors le théorème de convergence bornée à la suite (U^p), on conclut :

$$\mathbb{E}\big(\sup_{0\leq s\leq T} |U^p_s - \tilde{U}_s|^2\big) \to 0,\ \text{lorsque } p \to \infty.$$

On a ainsi obtenu une solution à l'EDSR de type (Eq2) et de paramètres $(g,\ \tilde{B})$ et on conclut alors à l'existence d'une solution à l'EDSR(F, β, B) de type (Eq1) ($B := \frac{\ln(\tilde{B})}{\beta}$) grâce aux relations de correspondance (2.5) établies à l'étape 2.

□

2.3 Annexe à la preuve de l'existence

On revient sur le point du lemme 2.3 laissé en suspens à savoir celui de la convergence forte des suites (V^n) et (N^n) introduites dans la dernière étape de la preuve de l'existence. Cette preuve est essentielle pour établir les deux résultats de stabilité suivants : le premier concerne la suite des EDSR caractérisées par les paramètres $(g^n, \tilde{B}^n)$ et de solutions (U^n, V^n, N^n). Le second, qui est une conséquence du premier, concerne la suite des EDSR données par (F^n, β, B^n) leur correspondant dès que $\tilde{B^n} := e^{\beta B^n}$ et dont les solutions sont données par les relations (2.5). Ce résultat de stabilité est l'un des points clés de la preuve du lemme 2.3 (il est à rapprocher du lemme 0.2 énoncé dans l'introduction générale de la thèse).

Preuve du point technique du lemme 2.3 Une première remarque concerne le fait que, dans le problème étudié, la suite $(\tilde{B}^n)$ est constante et égale à $\tilde{B}$, hypothèse qu'il a été possible d'élargir sans difficulté particulière. Bien que l'on se restreigne à une suite de générateurs (g^n) satisfaisant $(H_1^{''})$, le résultat s'étend sans difficulté en supposant seulement (H_1) (on procède alors comme à l'étape 2 de la preuve du théorème 2.1 d'existence). Afin d'établir la preuve du résultat de convergence forte, on a recours aux estimations a priori (uniformes en n) des normes BMO de V^n dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et des martingales N^n dans $\mathcal{M}^2([0,T])$ (ces estimations sont fournies par l'inégalité (ii) du lemme 2.1). Afin de simplifier l'écriture, on utilise les notations suivantes (pour tous entiers n et p) :

$$U^{n,p} = U^n - U^p,\ V^{n,p} = V^n - V^p \ \text{ et } N^{n,p} = N^n - N^p.$$

On définit tout d'abord la fonction Φ_L (dont le paramètre L sera fixé plus loin) par :

$$\Phi_L(x) = \frac{e^{Lx} - Lx - 1}{L^2}.$$

Φ_L est une fonction deux fois continûment différentiable et satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_L(0) = 0, \text{ et : } \Phi_L,\ \Phi_L^{''} \geq 0, \\ \Phi_L^{'}(x) \geq 0, \ \text{ dès que : } x \geq 0, \\ \Phi_L^{''} - L\Phi_L^{'} = 1. \end{cases}$$

On considère alors la famille de semimartingales positives suivantes :

$$(\Phi_L(U^n - U^p))_{n\geq p} = (\Phi_L(U^{n,p}))_{n\geq p},$$

et on écrit la formule d'Itô pour cette famille de semimartingales et sous forme intégrée entre 0 et T :

$$\mathbb{E}\big(\Phi_L(U_0^{n,p})\big) - \mathbb{E}\big(\Phi_L(U_T^{n,p})\big) = \mathbb{E}\Phi_L(U_0^{n,p}) - \mathbb{E}\Phi_L(\tilde{B}^n - \tilde{B}^p)$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T (\Phi_L^{'}(U_s^{n,p}))(g^n(s, U_s^n, V_s^n) - g^p(s, U_s^p, V_s^p))dC_s$$

$$-\mathbb{E}\int_0^T \frac{\Phi_L^{''}}{2}(U_s^{n,p})|m_s(V_s^{n,p})|^2 dC_s - \mathbb{E}\int_0^T \frac{\Phi_L^{''}}{2}(U_s^{n,p})d\langle N^{n,p}\rangle_s.$$

Dans un premier temps, on souhaite justifier le passage à la limite inférieure dans chaque membre de l'égalité précédente, lorsque $n \to \infty$ (p étant fixé). Pour ce faire, l'objectif est de regrouper dans le membre de gauche tous les termes où intervient la variation quadratique de l'intégrale stochastique $V^{n,p} \cdot M$ ou bien celle de $N^{n,p}$. Afin de contrôler le premier terme du membre de droite et, en particulier, les accroissements des générateurs, on s'appuie sur le fait que, pour tout n et p, g^n et g^p satisfont $(H_1^{''})$ avec les mêmes paramètres : on établit ainsi, à l'aide d'une série de majorations simples, un contrôle de ces accroissements :

$$|g^n(s, U_s^n, V_s^n) \ - g^p(s, U_s^p, V_s^p)|$$

$$\leq \ 2\bar{\alpha}_s + \frac{\gamma}{2}|m_s(V_s^n)|^2 + \frac{\gamma}{2}|m_s(V_s^p)|^2$$

$$\leq \ 2\bar{\alpha}_s + \frac{3\gamma}{2}\big(|m_s(V_s^{n,p})|^2 + |m_s(V_s^p - \tilde{V}_s)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2\big)$$
$$+\gamma\big(|m_s(V_s^p - \tilde{V}_s)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2\big)$$

$$\leq \ 2\bar{\alpha}_s + \frac{3\gamma}{2}\big(|m_s(V_s^{n,p})|^2\big) + \frac{5\gamma}{2}\big(|m_s(V_s^p - \tilde{V}_s)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2\big).$$

Les deux dernières inégalités résultent de la propriété de convexité de $z \to z^2$. Tenant compte de ces majorations et transférant dans le membre de gauche le terme contenant $|m_s V_s^{n,p}|^2$ et exploitant la propriété : $\Phi_L^{''}(x) \geq 1$ (lorsque $x \geq 0$), on aboutit finalement à l' inégalité (**) :

$$\mathbb{E}\Phi_L(U_0^{n,p}) \ + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(|N_T^{n,p}|^2\big)$$
$$+ \ \mathbb{E}\int_0^T ((\frac{\Phi_L^{''}}{2} - \frac{3\gamma}{2}\Phi_L^{'})(U_s^{n,p})|m_s(V_s^{n,p})|^2 dC_s)$$

$$\leq \ \mathbb{E}\Phi_L(\tilde{B}^n - \tilde{B}^p) + \mathbb{E}\int_0^T \Phi_L^{'}(U_s^{n,p})2\bar{\alpha}_s dC_s$$
$$+\mathbb{E}\int_0^T \Phi_L^{'}(U_s^{n,p})\left(\frac{5\gamma}{2}(|m_s(V_s^p - \tilde{V}_s)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2)\right) dC_s. \ (**)$$

On pose alors : $L = 8\gamma$ et on exploite la dernière propriété énoncée pour la fonction Φ_L :

$$\Phi_L'' - 8\gamma\Phi_L' = 1, \tag{2.12}$$

ce qui entraine donc la positivité de $(\frac{\Phi_L''}{2} - \frac{3\gamma}{2}\Phi_L')(U_s^{n,p})$ et donc ainsi, celle du dernier terme du membre de gauche. Afin de justifier le passage à la limite inférieure dans le membre de gauche de (**), on exploite

- la convergence faible de (V^n) vers $\tilde{V}$ dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$, d'une part,
- la convergence faible de (N^n) vers $\tilde{N}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T])$, d'autre part.

(ces dernières convergences ayant éventuellement lieu le long d'une sous suite). On obtient ainsi

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T ((\frac{\Phi_L''}{2} - \frac{3\gamma}{2}\Phi_L')(U_s^{n,p})|m_s(V_s^{n,p})|^2)dC_s \geq \tag{2.13}$$
$$\mathbb{E}\int_0^T ((\frac{\Phi_L''}{2} - \frac{3\gamma}{2}\Phi_L')(\tilde{U}_s - U_s^p)(|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2)dC_s),$$

et de manière analogue

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|N_T^{n,p}|^2\big) \geq \mathbb{E}\big(|\tilde{N}_T - N_T^p|^2\big). \tag{2.14}$$

Le passage à la limite lorsque $n \to \infty$ (à p fixé) dans le membre de droite de l'inégalité (**) est justifié par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en se rappelant, d'une part, la convergence (au sens $\mathbb{P}$-presque sûre) de la suite monotone (U^n) vers le processus $\tilde{U}$ et du fait, d'autre part, du contrôle suivant (valable uniformément en n) :

$$\begin{aligned}
&\Phi_L'(U_s^{n,p})\big(\frac{5\gamma}{2}(|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2) + 2\bar{\alpha}_s\big) \\
&\qquad \leq\ \Phi_L'(\tilde{U}_s - U_s^p)\big(\frac{5\gamma}{2}(|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2 + |m_s\tilde{V}_s|^2) + 2\bar{\alpha}_s\big).
\end{aligned}$$

Le processus du membre de droite appartient à $L^1(dC_s \otimes d\mathbb{P})$, en tant que produit d'un processus borné et d'une somme de processus intégrables. Utilisant les inégalités (2.13), (2.14) ainsi que la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre de $\tilde{B}^n$ vers $\tilde{B}$, il résulte du passage à la limite lorsque $n \to \infty$ dans (**) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Phi_L(\tilde{U}_0 - U_0^p) + \mathbb{E}\frac{1}{2}\big(|\tilde{N}_T - N_T^p|^2\big) \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T ((\frac{\Phi_L''}{2} - \frac{3\gamma}{2}\Phi_L')(\tilde{U}_s - U_s^p)|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2 dC_s) \\
&\leq\ \mathbb{E}(\Phi_L(\tilde{B} - \tilde{B}^p))
\end{aligned}$$

$$+\mathbb{E}\left(\int_0^T \Phi_L^{'}(\tilde{U}_s - U_s^p)(\frac{5\gamma}{2}|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2 + 2\bar{\alpha}_s + \frac{5\gamma}{2}|m_s\tilde{V}_s|^2)dC_s\right).$$

Pour justifier le second passage à la limite (i.e. lorsque $p \to \infty$), on procède de même en transférant dans le membre de gauche tous les termes où apparait $|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2$, ce qui fournit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Phi_L(\tilde{U}_0 - U_0^p) + \mathbb{E}\frac{1}{2}\big(|\tilde{N}_T - N_T^p|^2\big) + \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}\big(|m_s(\tilde{V}_s - V_s^p)|^2 dC_s\big) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\Phi_L(\tilde{B} - \tilde{B}^p) + \int_0^T \Phi_L^{'}(\tilde{U}_s - U_s^p)(2\bar{\alpha}_s + \frac{5\gamma}{2}|m_s\tilde{V}_s|^2)dC_s\right)
\end{aligned}$$

L'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue aux termes du membre de droite permet de conclure directement aux convergences (fortes) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} & V^p \to \tilde{V} \quad \text{dans } L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P}) \\ \text{et} & \\ & N^p \to \tilde{N} \quad \text{dans } \mathcal{M}^2([0,T]). \end{array} \right.$$

De cette étude, on déduit le résultat de stabilité pour l'EDSR (Eq1) qui nous intéresse. On rappelle le résultat établi à l'étape 2 de la preuve du théorème 2.1 à savoir que, si (Y^n, Z^n, L^n) est une solution de l'EDSR(F^n, β, B^n) de type (Eq1), alors le triplet (U^n, V^n, N^n) est solution de l'EDSR$(g^n, e^{\beta B^n})$ de type (Eq2), où g^n est définie à l'aide de F^n par :

$$g^n(s,u,v) = \beta\rho_{c^2}(u)F^n(s, \frac{\ln(u \vee c^1)}{\beta}, \frac{v}{\beta(u \vee c^1)}) - \frac{1}{2(u \vee c^1)}|m_s v|^2,$$

où les constantes c^1 et c^2 (définies à l'étape 2) sont indépendantes de n. Il suffit donc d'appliquer le résultat de stabilité à la suite d'EDSR de paramètres $(g^n, e^{\beta B^n})$, afin d'obtenir que le triplet $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{N})$ est solution de l'EDSR de paramètres $(g, e^{\beta B})$ avec de plus g qui est donnée par

$$g(s,u,v) = \beta\rho_{c^2}(u)F\big(s, \frac{\ln(u \vee c^1)}{\beta}, \frac{v}{\beta(u \vee c^1)}\big) - \frac{1}{2(u \vee c^1)}|m_s v|^2,$$

et de sorte que l'on a les convergences suivantes :

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_t^n - \tilde{U}_t| \to 0,\ \mathbb{E}\int_0^T |m_s(V_s^n - \tilde{V}_s)|^2 dC_s \to 0,\ \text{et } \mathbb{E}\big[\langle N^n - \tilde{N}\rangle_T\big] \to 0.$$

On revient alors à l'EDSR de type (Eq1) en posant :

$$\tilde{Y} := \frac{\ln(\tilde{U})}{\beta},\ \tilde{Z} := \frac{\tilde{V}}{\beta\tilde{U}},\ \text{et}\ \tilde{L} := \frac{1}{\beta\tilde{U}} \cdot \tilde{N},$$

d'où il s'ensuit la relation :

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^n - \tilde{Y}_t| = \sup_{t\in[0,T]} |\frac{1}{\beta}\big(\ln(U_t^n) - \ln(\tilde{U}_t)|.$$

Cette expression tend vers zéro (au sens presque sûre), puisque la variable $\sup_{t\in[0,T]} |U_t^n - \tilde{U}_t)|$ tend vers zéro ($\mathbb{P}$-p.s.) et que la suite de processus (U^n) possède une borne inférieure c_1 indépendante de n et strictement positive. Reste à justifier la convergence dans leurs espaces de Hilbert respectifs (à savoir $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2([0,T])$) des suites (Z^n) et (L^n) : ces deux convergences résultent de manipulations élémentaires autour des relations données par (2.5). D'une part et pour la suite (Z^n), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\int_0^T |m_s(Z_s^n - \tilde{Z}_s)|^2 dC_s)\\
&\quad = \mathbb{E}(\int_0^T |m_s(\frac{V_s^n}{\beta U_s^n} - \frac{\tilde{V}_s}{\beta \tilde{U}_s})|^2 dC_s) = \mathbb{E}(\int_0^T |m_s\big(\frac{\tilde{U}_s V_s^n - U_s^n \tilde{V}_s}{\beta \tilde{U}_s U_s^n}\big)|^2 dC_s)\\
&\quad \leq \mathbb{E}(\int_0^T \frac{1}{\beta^2 c_1^4}\big(2|m_s(\tilde{U}_s - U_s^n)\tilde{V}_s|^2 + 2|m_s\tilde{U}_s(V_s - V_s^n)|^2\big)dC_s).
\end{aligned}$$

La convergence de (Z^n) vers $\tilde{Z}$ dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ résulte donc de la convergence de $\sup_{t\in[0,T]} (U_t^n - \tilde{U}_t)$ vers zéro et de celle de (V^n) vers $\tilde{V}$ dans $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$. D'autre part et pour la suite (L^n), on procède de même en écrivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|L_T^n - \tilde{L}_T|^2\big) &= \mathbb{E}\big(|\int_0^T \frac{1}{\beta U_s^n} dN_s^n - \int_0^T \frac{1}{\beta \tilde{U}_s} d\tilde{N}_s|^2\big)\\
&= \mathbb{E}\big(|\int_0^T \frac{\tilde{U}_s}{\beta \tilde{U}_s U_s^n} dN_s^n - \int_0^T \frac{U_s^n}{\beta \tilde{U}_s U_s^n} d\tilde{N}_s|^2\big)\\
&\leq \tfrac{2}{\beta^2 c_1^4}\mathbb{E}\big(|\int_0^T (\tilde{U}_s - U_s^n) d\tilde{N}_s|^2 + |\int_0^T \tilde{U}_s d(\tilde{N} - N^n)_s|^2\big),
\end{aligned}$$

et il en résulte que $(L^n - \tilde{L})$ converge vers zéro dans $\mathcal{M}^2([0,T])$ (du fait notamment de la convergence de $(N^n - \tilde{N})$ dans le même espace vers 0)

$\square$

2.4 Seconde étude : condition terminale non bornée

Le résultat de cette dernière section consiste à élargir la classe des EDSR de type (Eq1) pour laquelle on a un résultat d'existence. On prouve ainsi le résultat d'existence énoncé dans le théorème ci- dessous sous des conditions plus faibles sur la condition terminale B.

Théorème 2.3 *Il existe au moins une solution (Y, Z, L), dans des espaces à préciser, pour l'EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F, β, B) telle que F satisfait (H_1) et (H_2), β est un réel non nul et B est une condition terminale non nécessairement bornée sous les deux conditions qui suivent :*

1. *Si la variable B satisfait la condition d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}(e^{\gamma e^{ba}|B|}) < \infty, \tag{2.15}$$

(les paramètres a et b sont ceux donnés par (H_1)) alors il existe une solution (Y, Z, L) telle que le processus Y est continu et Z et L sont respectivement dans $L^2_{loc}(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2_{loc}([0,T])$.

2. *Si, de plus, on suppose que B satisfait la condition plus forte :*

$$\exists \lambda > \gamma e^{ba}, \;\; \mathbb{E}(e^{\lambda|B|}) < \infty, \tag{2.16}$$

alors il existe une solution (Y, Z, L) satisfaisant
- *$\exists\, p$, $p > 1$, tel que : $\mathbb{E}(\sup_t \exp(p\gamma|Y_t|)) < \infty$,*

(ce qui entraine : $Y \in S^p(\mathbb{R})$, pour tout p),
- *$Z \in L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $U \in \mathcal{M}^2([0,T])$.*

2.4.1 Preuve du résultat principal d'existence

On résume la démarche que nous allons suivre dans cette section pour justifier le résultat principal énoncé dans la première partie de ce théorème, sous la condition (2.15). Pour ce faire, on se ramène d'abord au cas où $B \geq 0$ et on pose : $B^n = B \wedge n$. Les résultats des sections précédentes donnent l'existence d'un triplet de solutions $(Y^n,\ Z^n,\ L^n)$ à l'EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F, β, B^n). Pour procéder dans un second temps à un passage à la limite en n, on adapte à ce nouveau cadre la procédure employée par [BRI06], en justifiant les deux étapes suivantes :

• Dans une première étape, on considère une famille (τ_k) de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt bien choisie en exploitant la nouvelle condition d'intégrabilité sur B. L'objectif est d'obtenir une borne uniforme en n dans S^∞ des processus $Y^{k,n}$ arrêtés en τ_k.

• Dans une seconde étape, on justifie un premier passage à la limite en n ($n \to \infty$, pour k fixé) puis un second (à savoir, lorsque $k \to \infty$), afin d'obtenir un triplet de processus (Y, Z, L) solution de l'EDSR donnée par (F, β, B) et tel que Z et U appartiennent respectivement à $L^2_{\mathrm{loc}}(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}([0,T])$.

Estimations a priori pour les approximations

On commence par remplacer la condition terminale B non bornée par $B^n = B \wedge n$, en supposant de plus que : $B > 0$, on en déduit alors l'existence du triplet de processus $(Y^n,\ Z^n,\ L^n)$ qui est une solution de l'EDSR(F, β, B^n) de type (Eq1). Notons simplement que lorsque B n'est plus positive, on écrit : $B = B^+ - B^-$ et on procède alors comme [BRI06] en utilisant la suite des EDSR$(F, \beta, B^{n,\,p})$ de type (Eq1) avec la suite des conditions terminales qui est donnée comme suit :

$$B^{n,\,p} = (B^+ \wedge n) - (B^- \wedge p).$$

Désormais, on supposera que B est positive. D'autre part, puisque pour n fixé, la variable B^n est bornée (par n), la suite des EDSR de type (Eq1) et de paramètres (F, β, B^n) satisfait le résultat de comparaison énoncé au théorème 2.2. On peut ainsi affirmer que :

$$\forall\, n,\ \ Y_s^n \leq Y_s^{n+1}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

On rappelle ci-dessous l'estimation a priori obtenue au lemme 2.1 et qui est valable, puisque, pour n fixé, B^n est une variable aléatoire bornée :

$$\mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } t, \quad |Y_t^n| \leq \frac{1}{\gamma} \ln(\mathbb{E}(\phi_t(|B^n|))|\mathcal{F}_t),$$

où la fonction $t \to \phi_t(\bar{B})$ introduite dans cette preuve, a pour expression

$$\phi_t(\bar{B}) = \exp(\gamma \frac{e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u} - 1}{b}) \exp(\gamma \bar{B} e^{\int_t^T b\bar{\alpha}_u dC_u}).. \tag{2.17}$$

On utilise alors, pour toute variable aléatoire $\bar{B}$ positive et bornée, la décroissance de la fonction $t \to \phi_t(\bar{B})$, la croissance de $\bar{B} \to \phi_t(\bar{B})$ ainsi que la propriété : $|B^n| \leq |B|$, afin de conclure que :

$$\mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } t, \quad |Y_t^n| \leq \frac{1}{\gamma} \ln(\mathbb{E}(\phi_0(|B|))|\mathcal{F}_t), \tag{2.18}$$

ce qui assure la bornitude dans $S^p(\mathbb{R})$ (avec $p := \frac{\lambda}{e^{ba}}$, $p > 1$) de la suite de processus (Y^n) en exploitant
- la relation (2.17), qui assure le contrôle suivant $\phi_0(|B|) \leq \exp(\gamma(\frac{e^{ba}-1}{b} + e^{ba}|B|))$, d'une part,
- et l'hypothèse (2.16) du théorème, d'autre part.

Introduction d'une suite de processus arrêtés

On explique désormais la procédure permettant le passage à la limite lorsque $(n \to \infty)$: pour ce faire, il est nécessaire d'obtenir des estimations a priori dans $\mathcal{S}^\infty$ des processus Y^n qui soient indépendantes de n. Ce n'est pas le cas, puisque les estimations données par (i) dans le lemme 2.1 dépendent de $\sup|B^n|$. Pour pallier à ce problème, on introduit tout d'abord la famille (τ_k) de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt comme suit :

$$\tau_k = \begin{cases} \inf_{t\in[0,T]}\{t,\ \frac{1}{\gamma}\ln(\mathbb{E}(\phi_0(|B|))|\mathcal{F}_t) \geq k\}, & \\ \\ T, & \text{lorsque : } \{\} = \emptyset. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse d'intégrabilité du théorème 2.3, on a : $\lim_{k\to\infty}(\tau_k) = T$, $\mathbb{P}$-p.s. De façon similaire à [BRI06], on introduit alors les triplets de processus $(Y^{k,n},\ Z^{k,n},\ L^{k,n})$ définis comme suit :

$$Y_t^{k,n} = Y_{t\wedge\tau_k}^n, \quad Z_t^{k,n} = Z_t^n\mathbf{1}_{t\leq\tau_k}, \quad L_t^{k,n} = L_{t\wedge\tau_k}^n.$$

Ces processus (dits arrêtés au temps τ_k) sont solutions des EDSR suivantes et données par les paramètres $(F^k := F\mathbf{1}_{s\leq\tau_k},\ \beta\ ,\ Y_{\tau_k}^n)$:

$$\begin{aligned} Y_t^{k,n} = Y_{\tau_k}^n \quad &+ \tfrac{\beta}{2}(\langle L^{k,n}\rangle_T - \langle L^{k,n}\rangle_t) + \int_t^T F(s, Y_s^{k,n}, Z_s^{k,n})\mathbf{1}_{s\leq\tau_k}dC_s \\ &- \int_t^T Z_s^{k,n}dM_s - (L_T^{k,n} - L_t^{k,n}). \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à justifier successivement deux passages à la limite.

Passage à la limite

Dans cette partie, on applique le résultat de stabilité donné par le lemme 2.3 à la suite des EDSR$(F\mathbf{1}_{t\leq\tau_k}, \beta, B^n)$ de type (Eq1) et pour laquelle on a construit la suite de solutions $(Y^{k,n}, Z^{k,n}, L^{k,n})$. On montre ainsi pourquoi, à k fixé, cette suite d'EDSR satisfait les conditions du lemme précité, de sorte que l'on justifie l'existence d'un triplet de processus (Y^k, Z^k, L^k) qui est une solution de l'EDSR$(F\mathbf{1}_{t\leq\tau_k},\ \beta,\ \sup_n Y_{\tau_k}^n)$ de type (Eq1). D'une part, la suite $(Y^{k,n})_n$ est uniformément bornée par k, à savoir que :

$$\forall\ t \leq \tau^k, \forall\ n,\ \ |Y_{t\wedge\tau_k}^n| = |Y_t^n| \leq \frac{1}{\gamma}\ln(\mathbb{E}(\phi_0(|B|))|\mathcal{F}_t) \leq k,$$

et, d'autre part, elle est croissante, de sorte que l'on peut définir le processus Y^k comme suit :

$$Y_t^k = \lim_n \nearrow (Y_{t\wedge\tau_k}^n), \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } t.$$

Appliquant alors le résultat du lemme 2.3 à la suite d'EDSR de paramètres $(F\mathbf{1}_{t\leq\tau_k}, \beta, B^n)$, on en déduit la convergence forte de $(Z^{k,n})$ et $(L^{k,n})$ respectivement vers des processus Z^k et L^k qui sont tels que le triplet (Y^k, Z^k, L^k) satisfait l'EDSR :

$$Y_t^k = \sup_n Y_{\tau_k}^n \quad +\tfrac{\beta}{2}(\langle L^k\rangle_T - \langle L^k\rangle_t) + \int_t^T F(s, Y_s^k, Z_s^k)\mathbf{1}_{s\leq\tau_k} dC_s$$

$$-\int_t^T Z_s^k dM_s - (L_T^k - L_t^k).$$

Il résulte de la construction donnée que :

$$\forall\ t\ \in [0,\tau_k],\ Y^n_{t\wedge\tau_{k+1}} = Y^n_{t\wedge\tau_k},\ Z^n\mathbf{1}_{t\leq\tau_{k+1}} = Z^n\mathbf{1}_{t\leq\tau_k},\ L^n_{t\wedge\tau_{k+1}} = L^n_{t\wedge\tau_k},$$

de sorte qu'après passage à la limite lorsque $n\to\infty$, on obtient :

$$Y_{t\wedge\tau_{k+1}} = Y_{t\wedge\tau_k},\ Z_t\mathbf{1}_{t\leq\tau_{k+1}} = Z_t\mathbf{1}_{t\leq\tau_k},\ L_{t\wedge\tau_{k+1}} = L_{t\wedge\tau_k}.$$

On peut donc définir les processus Y, Z et L comme suit :

$$\forall t\ \in [0,\tau_k],\quad Y_t = Y_t^k,\ Z_t = Z_t^k \text{ et } L_t = L_t^k.$$

Ces processus sont bien définis sur $[0,T]$, puisque la suite (τ_k) satisfait :

$$\exists\ \tilde\Omega,\ \mathbb{P}(\tilde\Omega) = 1,\ \forall\ \omega\in\tilde\Omega\ \exists\ k(\omega),\ \forall\ k,\ k\geq k(\omega),\quad \tau_k(\omega) = T.$$

Il reste à justifier que les processus contruits satisfont les conditions d'intégrabilité requises. Ainsi, la continuité du processus $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ résulte à la fois des propriétés de la suite (τ_k) et du fait que ce dernier coincide avec Y^k (sur $[0,\tau_k]$ et pour tout k) lui-même continu. Afin de montrer pourquoi l'intégrale stochastique $Z\cdot M$ ainsi que L sont de carré localement intégrable dans leurs espaces de Hilbert respectifs, il nous faut établir :

$$\mathbb{P}(\int_0^T |Z_s|^2 dC_s = \infty) = 0 \ \text{ et }\ \mathbb{P}(\langle L\rangle_T = \infty) = 0.$$

On commence par écrire l'égalité ensembliste suivante :

$$\{\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \infty\}$$
$$= \{\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \infty,\ \tau_k = T\}\bigcup\{\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \infty,\ \tau_k < T\}.$$

Or, sur l'ensemble $\{\tau_k = T\}$, on a la relation

$$\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \int_0^T |m_s Z_s^k| dC_s,$$

et on obtient donc :

$$\mathbb{P}(\{\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \infty\}) \leq \mathbb{P}(\{\int_0^T |m_s Z_s^k|^2 dC_s = \infty\}) + \mathbb{P}(\tau_k < T).$$

Comme k est fixé, $Z^k \cdot M$ est une martingale de carré intégrable et par conséquent, on a :
$\mathbb{P}(\{\int_0^T |m_s Z_s^k|^2 dC_s = \infty\}) = 0$, ce qui entraine la majoration suivante

$$\forall\ k, \quad \mathbb{P}(\{\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s = \infty\}) \leq \mathbb{P}(\tau_k < T).$$

Du fait que : $\mathbb{P}(\tau_k < T) \to 0$, la conclusion s'ensuit.
On procède de la même façon pour justifier : $\mathbb{P}(\langle L\rangle_T = \infty) = 0$.

□

2.4.2 Propriétés complémentaires d'intégrabilité

On se place désormais sous la seconde hypothèse du théorème 2.3 qui impose une condition d'intégrabilité plus forte sur B : dès lors, on obtient d'après la section précédente l'existence d'une solution (Y, Z, L) avec Y à trajectoires continues et Z et L respectivement dans $L^2_{\text{loc}}(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}([0,T])$. L'objectif est de prouver que les processus Y, Z et L appartiennent respectivement à $S^p(\mathbb{R})$ (pour tout p, $p > 1$), $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2([0,T])$.
Or, d'après la construction menée dans la section précédente, la variable Y_t est limite monotone et presque sûre de la suite (Y_t^n) et, d'autre part, chaque élément de cette suite satisfait l'estimation a priori (uniforme en n) donnée par (2.18). Ceci permet alors d'affirmer :

$$\mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } t, \quad |Y_t| \leq \frac{1}{\gamma} \ln\big(\mathbb{E}(\phi_0(|B|)|\mathbb{F}_t)\big).$$

D'autre part, renvoyant à l'expression (2.17) de cette fonction, on obtient la majoration qui suit :

$$\mathbb{E}(\phi_0(|B|)|\mathbb{F}_t) \leq \exp(\gamma\frac{e^{ba}-1}{b})\mathbb{E}(\exp(\gamma e^{ba}|B|)|\mathbb{F}_t).$$

D'après l'hypothèse donnée par (2.16) et posant : $p = \frac{\lambda}{\gamma e^{ba}}$ $(p > 1)$, l'application de l'inégalité sur les moments est bien justifiée pour la martingale $\mathbb{E}(\phi_0(|B|)|\mathbb{F}_t)$ qui est bornée dans L^p. Il en résulte

$$\begin{aligned}\exists\ c_p, \quad \mathbb{E}(\sup_t \exp(p\gamma|Y_t|)) &\leq \mathbb{E}(\big(\sup_t \mathbb{E}(\phi_0(|B|)|\mathbb{F}_t)\big)^p) \\ &\leq c_p \mathbb{E}(\exp(p\gamma e^{ba}|B|)) < \infty.\end{aligned}$$

Afin de justifier l'appartenance des processus Z et U respectivement à $L^2(d\langle M\rangle \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathcal{M}^2([0,T])$, on applique la formule d'Itô à la semimartingale $\psi_\gamma(Y)$. L'expression de la fonction ψ_γ est celle donnée dans la preuve du lemme 2.1 et que l'on rappelle :

$$\psi_\gamma(x) = \frac{e^{\gamma x} - 1 - \gamma x}{\gamma^2}.$$

On introduit aussi la famille de temps d'arrêt (τ^n) suivante

$$\tau^n = \inf\{t, \int_0^t e^{2\gamma Y_s}|m_s Z_s|^2 dC_s \geq n \text{ ou } \int_0^t e^{2\gamma Y_s} d\langle L\rangle_s \geq n\}.$$

Après des manipulations élémentaires de la fonction ψ_γ (déjà évoquées dans la preuve du lemme 2.1) et exploitant l'hypothèse (H_1) sur le générateur F, on obtient la forme suivante (intégrée entre 0 et $t \wedge \tau^n$)

$$\begin{aligned}\psi_\gamma(Y_0) - \psi_\gamma(Y_{t\wedge\tau^n}) \leq & \int_0^{t\wedge\tau^n} \psi_\gamma'(Y_s)(|\bar{\alpha}_s|(1+b|Y_s|)dC_s \\ & + \int_0^{t\wedge\tau^n} \psi_\gamma'(Y_s)(Z_s dM_s + dL_s) \\ & -\frac{1}{2}\langle L\rangle_{t\wedge\tau^n} - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau^n} |m_s Z_s|^2 dC_s.\end{aligned}$$

D'après la définition de τ^n, chaque terme de la somme située à la seconde ligne et dans le membre de droite est une vraie martingale. On prend alors l'espérance dans chaque membre, après avoir transféré le dernier terme du membre de droite à gauche, pour obtenir :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_0^{T\wedge\tau^n} |m_s Z_s|^2 dC_s + \langle L\rangle_{T\wedge\tau^n}\Big) \\ &\qquad \leq \frac{1}{\gamma^2}\mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,T]} \exp(\gamma|Y_t|)\big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge\tau^n} \exp(\gamma|Y_s|)(|\bar{\alpha}_s|(1+b|Y_s|)dC_s\Big).\end{aligned}$$

Exploitant alors la propriété d'intégrabilité de $\sup_t \exp(p\gamma|Y_t|)$ pour justifier l'application du lemme de Fatou, i.e. le passage à la limite (croissante) en n, on en conclut donc

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T |m_s Z_s|^2 dC_s + \langle L\rangle_T\Big) < \infty.$$

Chapitre 3

Application en Finance

Dans cette partie, on illustre l'intérêt de l'étude théorique menée au chapitre 2 pour une classe d'EDSR à croissance quadratique. L'objectif consiste à résoudre le problème d'optimisation introduit à la section 0.3.2 en appliquant et en justifiant la méthode (MD) présentée dans cette dernière section 0.3.2 : cette méthode qualifiée de dynamique a déjà été utilisée pour obtenir des résultats concernant le même problème d'optimisation dans le cadre brownien dans [ELK00] ou encore dans [HU05] et celle ci permet d'exprimer la fonction valeur en terme de la solution d'une EDSR à croissance quadratique, dont les paramètres sont explicites. Dans ce chapitre, le problème est étudié pour trois types de fonction d'utilité : d'une part et de façon majoritaire, on traite le cas de l'utilité exponentielle, d'autre part et lorsque l'actif contingent B est nul, on traite les cas des utilités logarithme et puissance.

3.1 Le cas de l'utilité exponentielle

Dans le cas de l'utilité exponentielle notée U_α et définie par $U_\alpha(\cdot) := -\exp(-\alpha\cdot)$ de paramètre α ($\alpha > 0$), on redonne la définition de la fonction valeur $V_t^B(x)$ à la date t introduite à la section 0.3.2 et définie par

$$V_t^B(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{\pi\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(U_\alpha(x + \int_t^T \pi_u \frac{dS_u}{S_u} - B)), \tag{3.1}$$

avec le processus de richesse $X^\pi := X^{\pi,t,x}$ (i.e. $X_t^{\pi,t,x} = x$) défini sur $[t,T]$ et donné par

$$\forall\ s \in [t,T],\ X_s^\pi := x + \int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_u}.$$

On conserve dans toute la suite les notations suivantes : x désigne la valeur du portefeuille à la date t, B est l'actif contingent (variable $\mathcal{F}_T$-mesurable et bornée), $X_T^\pi - B$ désigne le portefeuille après livraison de l'actif B obtenu en adoptant la stratégie π (à la date d'échéance T) : on note que toutes les stratégies π considérées prennent leurs valeurs dans $[t, T]$ et $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des stratégies admissibles au sens de la définition 0.3 de l'introduction.

3.1.1 Description du marché financier

On précise tout d'abord le cadre et les hypothèses du marché financier étudié. On considère un espace probabilisé standard $(\Omega,\ \mathbb{F},\ \mathbb{P})$ muni d'une filtration continue $\mathcal{F}$ et où M désigne une martingale continue d dimensionnelle et de carré intégrable. On conserve les notations de la première section de cette première partie : à savoir, $\langle M \rangle := (\langle M^i, M^j \rangle)_{i,j}$ désigne le crochet oblique de cette martingale et ce dernier s'écrit sous la forme

$$\forall\ s,\ d\langle M^i, M^j \rangle_s = (m_s^i)' m_s^j dC_s,$$

avec C un processus croissant, prévisible et borné (et aussi continu puisque M l'est). Cette écriture est donnée dans le contexte d'une filtration continue dans [ELK97a]). Sur cet espace, on introduit alors le processus d dimensionnel $S = (S_t^i, i = 1, \cdots, d)$ qui est une semimartingale continue (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) et dont chaque composante représente le prix des d actifs risqués. L'évolution de ce processus est régie par l'équation :

$$\forall\ i \in \{1, \cdots, d\},\ \frac{dS_s^i}{S_s^i} = dM_s^i + dA_s^i,\ \text{ avec : } dA_s^i = \sum_j d\langle M^i, M^j \rangle_s \lambda_s^j. \quad (3.2)$$

On impose une condition complémentaire d'intégrabilité sur le processus λ prévisible (et de carré intégrable) : ce dernier satisfait de plus

$$(H_\lambda) \qquad \exists\ a_\lambda > 0,\ \int_0^T \lambda_s' d\langle M \rangle_s \lambda_s = \int_0^T |m_s \lambda_s|^2 dC_s \leq a_\lambda,\ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En particulier, cela implique que λ est dans l'espace BMO(M) (cette notation est explicitée, dans le cas d'une martingale M continue, dans la section 1.2 de cette première partie de la thèse).

Remarque 1 La forme spécifique de l'EDS donnée dans (3.2) est justifiée dans [DEL95] et, en particulier, en ce qui concerne le cadre d'une filtration continue générale (non nécessairement brownienne), le lecteur pourra se référer à l'article récent [BOB]. La condition d'absolue continuité (donnée dans (3.2)) est celle requise afin d'assurer que la notion habituelle de non arbitrage est satisfaite : cette notion théorique est reliée à l'existence d'une mesure équivalente de martingale (pour plus de détails, on renvoie aux deux derniers articles cités). Toutefois, la condition imposée ici est un peu plus forte que celle donnée dans [DEL97] (qui est connue sous le nom de condition de structure) sur le processus $K := \langle \lambda \cdot M \rangle$. Ce dernier, communément appelé le "mean variance tradeoff", est donné par la formule suivante

$$\forall\ t,\ K_t = \int_0^t \lambda_s' d\langle M \rangle_s \lambda_s.$$

Par la suite, l'hypothèse (H_λ) permet d'appliquer les résultats précis du lemme 2.1 à l'EDSR spécifique introduite par l'intermédiaire de la méthode (MD). Toutefois, bien que ceci ne soit pas traité dans cette thèse, une procédure standard de localisation pourrait permettre de généraliser certains des résultats théoriques obtenus, sous l'hypothèse plus faible d'appartenance de λ à l'espace $\mathrm{BMO}(M)$. Anticipant ici sur les résultats du problème d'optimisation étudié, la méthode (MD) relie la valeur du problème (P1) de la section 0.3.2 à la solution d' une EDSR de type (Eq1) de paramètres (F, β, B) et dont le processus $\bar{\alpha}$ (associé à l'hypothèse (H_1) sur F) est directement relié au processus K.

Dans ce cadre spécifique, on réintroduit les notions de processus de richesse et de stratégie (présentées aussi au paragraphe 0.3.2) nécessaires pour la résolution du problème d'optimisation (3.1).

Définition 3.1 *Le processus d-dimensionnel $\pi := (\pi_s)_{s\in[t,T]}$ est appelé stratégie s'il est adapté à la filtration $\mathcal{F}$ et si le processus $X^\pi_\cdot$, défini sur $[t,T]$ par :*

$$\int_t^s \pi \frac{dS}{S} := \int_t^s \sum_{i=1}^d \frac{\pi^i}{S^i} dS^i,$$

satisfait la condition minimale d'intégrabilité suivante :

$$\mathbb{E}\big(\sum_i |\frac{\pi^i_u}{S^i_u}|^2 d\langle S^i\rangle_u\big) < \infty. \tag{3.3}$$

On note par $X^\pi := X^{\pi,t,x}$ le processus de richesse associé à la stratégie π et tel que : $X^{\pi,t,x}_t := x$:

$$\forall s \in [t,T], \quad X^\pi_s = x + \int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_u}, \tag{3.4}$$

où le processus de prix est donnée par l'EDS (3.2)

Sous les hypothèses (3.2) et (3.3), on obtient que l'intégrale stochastique $X^\pi := (\int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_u})_{s\in[t,T]}$ appartient à $S^2(\mathbb{R})$: se référant à la preuve fournie dans la remarque 2 (page 5) de [HU05]), ceci entraine la condition habituelle de non arbitrage, condition qui a été introduite dans la section 0.3.1 (page 27).

On rappelle la définition d'admissibilité que nous emploierons pour résoudre notre problème d'optimisation : celle ci a été donnée par la définition 0.3 (elle a été originairement introduite par [HU05]) et on la réécrit en l'adaptant au marché financier introduit.

Définition 3.2 *Soit $\mathcal{C}$ un sous ensemble fermé mais non nécessairement convexe de $\mathbb{R}^d$ et contenant 0. L'ensemble $\mathcal{A}_t$ des stratégies admissibles regroupe l'ensemble des processus $\pi = (\pi_s)_{s\in[t,T]}$ d-dimensionnels et prévisibles* *satisfaisant, d'une part :* $\pi_s \in \mathcal{C}$ $\mathbb{P}$*-p.s. et pour tout* s*, et :* $\mathbb{E}(\int_t^T |m_s\pi_s|^2 dC_s) < \infty$ *et d'autre part, la condition d'uniforme integrabilité de la famille suivante :*

$$\{\exp(-\alpha X_\tau^\pi),\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt à valeurs dans } [t,T]\}.$$

Remarque 2 Le processus $\pi := (\pi_s)_{s\in[t,T]}$ dit processus de stratégie est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et chaque composante π_i représente la somme d'argent investie dans l'actif i. On note que le caractère incomplet (cette notion est introduite à la section 0.3.1) du marché financier est due à la présence de contraintes sur le portefeuille. Ces contraintes sont représentées par l'ensemble $\mathcal{C}$, qui est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ où les stratégies prennent leurs valeurs. La condition de convexité est très généralement répandue et on note que l'hypothèse de non convexité a déjà été étudiée dans [HU05]. Elle se justifie lorsque l'on impose, par exemple, que seules des parts entières d'actifs peuvent être négociées lors de transactions (i.e $\frac{\pi^i}{S^i} \in \mathbb{N}$). On impose de plus et de façon naturelle, que 0 appartient $\mathcal{C}$ (ceci correspond à la stratégie consistant à ne rien faire).

3.1.2 La solution du problème d'optimisation

L'objectif consiste ici à employer la méthode de résolution dynamique (MD) afin d'exprimer la solution du problème d'optimisation (3.1) en fonction de la solution d'une EDSR quadratique du type (Eq1). On énonce les deux résultats principaux de cette section.

Théorème 3.1 *L'expression de la fonction valeur* $V_t^B(x)$ *(à la date* t*) qui est associée au problème d'optimisation (3.1) est donnée par :*

$$V_t^B(x) = U_\alpha(x - Y_t), \tag{3.5}$$

où le processus Y *est la solution d'une EDSR définie sur* $[t,T]$*, de type (Eq1) et de paramètres* (F^α, β, B) *:*

$$\begin{cases} dY_s = -F^\alpha(s, Z_s)dC_s - \frac{\beta}{2} d\langle L\rangle_s + Z_s dM_s + dL_s \\ Y_T = B, \end{cases}$$

qui est à croissance quadratique et de paramètres suivants :

- $\beta = \alpha$ *(*α *correspond au paramètre dit d'aversion au risque)*
- *la condition terminale* B*, qui est une variable* $\mathcal{F}_T$ *mesurable et bornée qui représente le contrat financier à la date d'échéance* T*.*
- *Le générateur* F^α*, dont l'expression est donnée,* $\mathbb{P}$*-p.s. et pour tout* s*, par :*

$$F^\alpha(s,z) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \big(\frac{\alpha}{2}|m_s(\pi - (z + \frac{\lambda_s}{\alpha}))|^2\big) - (m_s z)'(m_s\lambda_s) - \frac{1}{2\alpha}|m_s\lambda_s|^2. \tag{3.6}$$

Corollaire 3.1 *Utilisant les résultats du théorème précédent, on obtient conjointement les deux assertions qui suivent :*
• *Il existe au moins une stratégie π^* optimale pour le problème (3.1) associé à l'expression $V_t^B(x)$, et qui satisfait, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, $s \in [t,T]$,*

$$\pi_s^* \in \arg\min_{\pi \in \mathcal{C}} |m_s(\pi - (Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha}))|^2. \tag{3.7}$$

• *La fonction valeur $V^B(x)$ satisfait le principe dynamique suivant :*

$$\forall\, \sigma,\ \tau\ (\mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}),\ \tau \leq \sigma, \quad V_\tau^B(x) = \mathbb{E}(V_\sigma^B(X_\sigma^{\pi^*,\tau,x})|\mathcal{F}_\tau), \tag{3.8}$$

où π^* est une stratégie optimale (définie sur $[\tau,\sigma]$) tel que le processus noté $R^{\pi^*} := U_\alpha(X^{\pi^*} - Y)$ satisfait la condition de martingale.

Preuve des résultats

Afin de procéder aux preuves des différents résultats énoncés dans le théorème et dans le corollaire et, dans un souci de clarté, on découpe le raisonnement en plusieurs étapes :
• Tout d'abord, on justifie l'expression des différents paramètres de l'EDSR en employant la même méthode dynamique que dans [HU05] : en particulier, on établit l'expression du générateur F^α, en effectuant des calculs formels, qui seront justifiés a posteriori.
• Dans une seconde étape, on exploite la forme de ces paramètres afin de justifier l'existence (et l'unicité) d'une solution (Y,Z,L) à l'EDSR, qui soit telle que pour toute stratégie π, R^π défini par $R^\pi = -\exp(-\alpha(X^\pi - Y))$ satisfait les conditions imposées.
• La dernière étape consiste à exploiter de façon précise les propriétés de la famille $(R^\pi)_{\pi \in \mathcal{A}_t}$ pour résoudre les deux problématiques associées au problème d'optimisation (3.1), à savoir

1. Expression de la fonction valeur $V^B(x)$ en termes de la solution Y à l'EDSR et énoncé du principe dynamique (3.8).

2. L'existence de stratégies optimales ainsi que leur caractérisation.

Mise en oeuvre de la méthode dynamique L'objectif de cette sous section consiste à justifier la construction d'une famille de processus ($R^\pi := U_\alpha(X^\pi - Y)$) satisfaisant les conditions données par (MD) et d'en déduire la forme spécifique de l'EDSR satisfaite par Y.
On rappelle que les stratégies ne sont définies que sur $[t,T]$ et on utilise

la notation suivante $\mathcal{E}_{t,\cdot}(M) := (\mathcal{E}_{t,s}(M))_{s\in[t,T]}$ pour désigner le processus défini sur $[t,T]$ et satisfaisant l'EDS

$$\forall\ s \in [t,T],\ d\mathcal{E}_{t,s}(M) = \mathcal{E}_{t,s}(M)dM_s \text{ et } \mathcal{E}_{t,t}(M) = 1.$$

Dans un premier temps, on exploite la définition du processus X^π et l'hypothèse selon laquelle Y est solution d'une EDSR de type (Eq1) pour écrire :

$$\begin{aligned} X^\pi_s - Y_s = (x - Y_t) + \int_t^s (\pi_u - Z_u)dM_u - \big(L_s - L_t\big) \\ + \int_t^s F^\alpha(u, Z_u)dC_u + \frac{\beta}{2}\big(\langle L\rangle_s - \langle L\rangle_t\big) + \int_t^s (m_u\pi_u)^{'}(m_u\lambda_u)dC_u. \end{aligned}$$

D'autre part, on utilise l'expression de l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale continue M afin d'obtenir :

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\alpha(\int_t^s (\pi_u - Z_u)dM_u)) = \\ \qquad \mathcal{E}_{t,s}(-\alpha(\int_t^s (\pi_u - Z_u)dM_u))\exp(\frac{\alpha^2}{2}\int_t^s |m_u(\pi_u - Z_u)|^2 dC_u), \\ \\ \exp(\alpha(L_s - L_t)) = \mathcal{E}_{t,s}(\alpha L)\exp(\frac{\alpha^2}{2}(\langle L\rangle_s - \langle L\rangle_t)), \end{array} \right.$$

et on en déduit finalement la décomposition multiplicative suivante de R^π :

$$R^\pi_s = -\exp(-\alpha(x - Y_t))\mathcal{E}_{t,s}(-\alpha(\pi - Z)\cdot M)\mathcal{E}_{t,s}(\alpha L)\exp(A^\pi_s - A^\pi_t), \quad (3.9)$$

avec A^π défini par :

$$\begin{aligned} &\forall\ s,\ s \in [t,T], A^\pi_s - A^\pi_t \ := \\ &\quad \int_t^s \big(- \alpha F^\alpha(u, Z_u) - \alpha(m_u\pi_u)^{'}(m_u\lambda_u) + \frac{\alpha^2}{2}|m_u(\pi - Z_u)|^2\big)dC_u \\ &\quad + \big(- \tfrac{\alpha\beta}{2}\big(\langle L\rangle_s - \langle L\rangle_t\big) + \tfrac{\alpha^2}{2}\big(\big(\langle L\rangle_s - \langle L\rangle_t\big). \end{aligned}$$

De plus et du fait de la stricte orthogonalité de M et L, il vient :

$$\mathcal{E}(-\alpha(\pi - Z)\cdot M)\mathcal{E}(\alpha L) = \mathcal{E}(-\alpha(\pi - Z)\cdot M + \alpha L) = \tilde{M}^\pi.$$

On utilise alors la forme de cette décomposition multiplicative : le processus R^π est une surmartingale s'il s'écrit sous forme du produit d'une martingale et d'un processus décroissant à variation finie. R^π étant un processus négatif ($\mathbb{P}$-p.s.), on traduit la condition de sousmartingale pour $-R^\pi$.
Dans la décomposition (3.9), la martingale (a priori seulement locale) est l'exponentielle stochastique $\tilde{M}^\pi$. Cette dernière est une vraie martingale dès lors que $-\alpha(\pi - Z)\cdot M$ et L sont des martingales BMO. Une condition

suffisante pour que $-R^\pi$ soit une sousmartingale est d'obtenir la positivité de la mesure dA^π, ce qui se reformule de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\alpha\frac{\beta}{2}d\langle L\rangle_s + \frac{\alpha^2}{2}d\langle L\rangle_s = 0, \quad \text{et :} \\ -\alpha(F^\alpha(s,Z_s) + (m_s\pi_s)^{'}m_s\lambda_s) + \frac{\alpha^2}{2}|m_s(\pi_s - Z_s)|^2 \geq 0. \end{cases}$$

Exploitant alors la condition de martingale du processus R^{π^*} (pour le choix d'une stratégie π^* optimale), les inégalités précédentes sont des égalités, ce qui fournit l'expression des paramètres F^α et β (avec $\beta = \alpha$).

Conséquences et justification des calculs formels Pour conclure à l'existence d'une solution unique à l'EDSR de paramètres (F^α, α, B), on vérifie que le générateur satisfait les hypothèses (H_1) et (H_2). D'une part, F^α possède la borne inférieure suivante :

$$F^\alpha(s,z) \geq -(m_s z)^{'}(m_s\lambda_s) - \frac{1}{2\alpha}|m_s\lambda_s|^2 \geq -|m_s z||m_s\lambda_s| - \frac{1}{2\alpha}|m_s\lambda_s|^2.$$

Il résulte de l'inégalité classique : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, une minoration de F^α

$$F^\alpha(s,z) \geq -\big(\frac{\alpha}{2}|m_s z|^2 + \frac{1}{\alpha}|m_s\lambda_s|^2\big).$$

D'autre part, on exploite le fait que : π, $\pi \equiv 0$ est à valeurs dans $\mathcal{C}$, on obtient la majoration qui suit :

$$F^\alpha(s,z) \leq \frac{\alpha}{2}|m_s z|^2.$$

F^α satisfait donc l'hypothèse (H_1) en posant : $b = 0$ et en définissant le processus $\bar{\alpha}$ par : $\bar{\alpha}_s := \frac{1}{\alpha}|m_s\lambda_s|^2$. Ce processus ainsi défini satisfait l'hypothèse $\int_0^T \bar{\alpha}_s dC_s \leq a < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s., du fait de l'hypothèse (H_λ) sur le processus λ. D'autre part, pour tous z^1, z^2 appartenant à $\mathbb{R}^d$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&|F^\alpha(s,z^1) - F^\alpha(s,z^2)| \\
&\leq |\frac{\alpha}{2}\big(\,dist^2(m_s(z^1 + \frac{\lambda_s}{\alpha}), m_s\mathcal{C}) - dist^2(m_s(z^2 + \frac{\lambda_s}{\alpha}), m_s\mathcal{C})\,\big)| \\
&\quad + | - (m_s z^1)^{'}(m_s\lambda_s) + (m_s z^2)^{'}(m_s\lambda_s)| \\
&\leq \frac{\alpha}{2}|m_s(z^1 - z^2)|(|m_s z^1| + |m_s z^2| + 2\frac{|m_s\lambda_s|}{\alpha}) + |m_s(z^1 - z^2)||m_s\lambda_s| \\
&\leq \frac{\alpha}{2}|m_s(z^1 - z^2)|(\theta_s + |m_s z^1| + |m_s z^2|).
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H_2) est satisfaite avec la constante C donnée par : $C = \frac{\alpha}{2}$ et pour tout s, $\theta_s = \frac{4|m_s\lambda_s|}{\alpha}$ (θ satisfait la condition d'intégrabilité requise par (H_λ)). L'existence et l'unicité pour l'EDSR caractérisée par la condition terminale B et le générateur F^α donné par (3.6) résultent donc des résultats théoriques du chapitre précédent.

Ayant désormais justifié l'existence d'une solution (Y, Z, L) avec le processus Y borné ($Y \in S^\infty$), on prouve que, pour toute stratégie π admissible, le processus R^π vérifie les conditions requises notées (MD). Puisque la valeur terminale de Y est donnée par $Y_T = B$ et que, par hypothèse, la richesse à la date t de l'agent est égale à x dans le problème (3.1), les assertions (i) et (ii) sont trivialement satisfaites. Afin de conclure pour l'assertion (iii), il s'agit de justifier que le processus R^π, d'expression (3.9), est une surmartingale pour toute stratégie π admissible (i.e. $\pi \in \mathcal{A}_t$). Comme l'exponentielle stochastique est une martingale locale positive, il existe une suite de temps d'arrêt (τ_n) telle que $(R^\pi_{\cdot\wedge\tau_n})$ soit une surmartingale (ceci pour tout π), c'est-à-dire que :

$$\forall\, t \leq u \leq s \leq T,\ \forall\, A \in \mathcal{F}_u, \quad \mathbb{E}\big(R^\pi_{s\wedge\tau_n}\mathbf{1}_A\big) \leq \mathbb{E}\big(R^\pi_{u\wedge\tau_n}\mathbf{1}_A\big).$$

D'autre part, du fait de la définition de l'ensemble d'admissibilité $\mathcal{A}_t$ et de la bornitude du processus Y, on obtient l'uniforme intégrabilité de la famille $(R^\pi_{\cdot\wedge\tau_n})$. On déduit donc, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, la propriété de surmartingale :

$$\forall\, u, s \in [t, T],\ u \leq s,\ \forall\, A \in \mathcal{F}_u, \quad \mathbb{E}\big(R^\pi_s\mathbf{1}_A\big) \leq \mathbb{E}\big(R^\pi_u\mathbf{1}_A\big).$$

Conclusion au problème d'optimisation (3.1) Dans ce paragraphe, on justifie l'expression de la fonction valeur V_t^B à la date t ainsi que l'existence d'une stratégie π^* admissible.
Dans un premier temps, on écrit la condition de surmartingale donnée pour toute stratégie π ($\pi \in \mathcal{A}_t$), ce qui fournit

$$\forall\, \pi,\ \pi \in \mathcal{A}_t, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(R^\pi_T) \leq R^\pi_t = U_\alpha(x - Y_t).$$

Il ne reste plus qu'à justifier l'existence d'une stratégie optimale π^* au sens où R^{π^*} est une vraie martingale. Cette dernière condition de martingale permet de retrouver le principe dynamique satisfait par la fonction valeur (principe donné par (3.8) dans le corollaire). On note enfin que, sous l'hypothèse d'existence d'une telle stratégie optimale π^*, on obtient l'expression fournie par (3.5) pour la fonction valeur, à savoir

$$V_t^B(x) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(R^{\pi^*}_T) = R^{\pi^*}_t = U_\alpha(x - Y_t).$$

Afin d'achever la preuve du théorème et de justifier l'existence d'une stratégie (optimale) vérifiant (3.7), on procède à l'aide d'un argument de sélection mesurable. La construction d'une telle sélection est identique à celle du lemme

11 de [HU05] et elle est basée sur le fait que toute telle stratégie satisfaisant (3.7) est définie (au sens ponctuel, i.e. pour tous s, ω fixés) , par

$$|m_s(\pi^* - (Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha}))| = \mathrm{dist}\big(m_s(Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha}),\ m_s\mathcal{C}\big),$$

et où $m_s\mathcal{C} = \{m_s\pi,\ \pi \in \mathcal{C}\}$. (Cette distance est bien définie, puisque l'ensemble est fermé mais, a priori, il n'y a pas d'unicité du point où elle est atteinte, ce qui justifie l'introduction de la notion de sélection mesurable). On considère maintenant une sélection mesurable π^* pour laquelle on souhaite justifier l'admissibilité au sens de la définition 0.3. Puisque 0 appartient à $\mathcal{C}$ et si on traduit que π^* réalise un argmin, on obtient

$$|m_s(\pi_s^* - (Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha}))| \leq |m_s(Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha})|.$$

On remarque, d'autre part, que :

$$|m_s(\pi^* - Z_s))| \leq |m_s(\pi^* - (Z_s + \frac{\lambda_s}{\alpha}))| + |m_s\frac{\lambda_s}{\alpha}|,$$

de sorte qu'on obtient un contrôle de $|m_s(\pi^* - Z_s))|$ ne dépendant que des processus Z et λ. Du fait de l'hypothèse sur λ et des contrôles BMO obtenus au lemme 2.1, ces processus sont tous deux dans BMO(M). Par application du critère de Kazamaki, on obtient que l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(-\alpha(\pi^* - Z) \cdot M)$ est une vraie martingale. Par conséquent, le processus R^{π^*} est une martingale, ce qui signifie aussi que : $\pi^* \in \mathcal{A}_t$.

Pour conclure au résultat du corollaire, on montre que cette propriété de martingale permet de retrouver l'énoncé du principe dynamique. D'une part, en exploitant un raisonnement analogue que celui utilisé pour obtenir l'écriture de la fonction valeur sous la forme (3.5) suivante

$$\Big(\forall\ t, \quad V_t(x) = R_t^{\pi^*} = U_\alpha(x - Y_t)\Big),$$

on étend sans difficulté la définition à tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ, en introduisant la notation $V_\tau^B(x)$ pour désigner la variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable suivante

$$V_\tau^B(x) := U_\alpha(X_\tau^{\pi^*,\tau,x} - Y_\tau) = U_\alpha(x - Y_\tau).$$

Cette variable vérifie aussi

$$V_\tau^B(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{\pi} \mathbb{E}\big(U_\alpha(x + \int_\tau^T \pi_u \frac{dS_u}{S_u} - B)|\mathcal{F}_\tau\big)$$

D'autre part, la propriété de martingale de $R^{\pi^*} := (U_\alpha(X^{\pi^*} - Y))$ s'écrit (en exploitant le théorème d'arrêt optimal de Doob) : pour tout temps d'arrêt $\tau, \sigma,\ \tau \leq \sigma$

$$V_\tau^B(X_\tau^{\pi^*}) := \mathbb{E}\big(V_\sigma^B(X_\sigma^{\pi^*,\tau,X_\tau^{\pi^*}})|\mathcal{F}_\tau\big),$$

où la notation $X_\sigma^{\pi^*,\tau,X_\tau^{\pi^*}}$ désigne le processus de richesse satisfaisant : $X_\tau^{\pi^*,\tau,X_\tau^{\pi^*}} = X_\tau^{\pi^*}$, dont il résulte alors

$$V_\tau^B(x) = \mathbb{E}\big(V_\sigma^B(X_\sigma^{\pi^*,\tau,x})|\mathcal{F}_\tau\big).$$

□

3.2 Cas des utilités logarithme et puissance

3.2.1 Nouveaux problèmes : le cadre

Dans cette sous section, on introduit deux nouvelles fonctions d'utilité, afin de présenter les deux problèmes d'optimisation qui leur sont rattachés. Comme pour le cas de l'utilité exponentielle, on justifie l'approche dynamique de la résolution du problème, par la présence de contraintes non convexes sur le portefeuille. L'une des différences majeures par rapport au cas précédent est la contrainte supplémentaire de positivité du processus de richesse (pour les deux types de fonctions d'utilité considérés). D'autre part et dans toute l'étude menée, on ne considère que le cas d'un actif contingent nul (i.e. $B \equiv 0$) : la fonction valeur associée au problème d'optimisation à la date t est notée $V_t(x)$ au lieu de $V_t^0(x)$. On conserve ici la modélisation de l'évolution du processus de prix S prise à la section 3.1 dans le cas de l'utilité exponentielle, à savoir :

$$\frac{dS_s}{S_s} = dM_s + d\langle M\rangle_s\lambda_s.$$

Dans les deux cas que nous nous proposons d'étudier, on est amené à redéfinir la notion de stratégie permettant de définir de façon précise la notion de processus de richesse (représentant le portefeuille de l'agent financier).

Définition 3.3 *On appele stratégie tout processus d-dimensionnel prévisible ρ et tel que le processus de richesse X^ρ associé est unidimensionnel et positif et défini, pour tout $s \in [t, T]$, par*

$$X_s^\rho = x + \int_t^s X_u^\rho \rho_u \frac{dS_u}{S_u} = x + \int_t^s X_u^\rho \rho_u dM_u + \int_t^s X_u^\rho \rho_u^{'} d\langle M\rangle_u \lambda_u,$$

avec le processus $X^\rho := \int_t^\cdot X_s^\rho \rho_s \frac{dS_s}{S_s}$ tel que la partie martingale est localement de carré intégrable (condition analogue à (3.3).

On note que, pour tout i, ρ^i représente la proportion d'argent investie dans l'actif i et que la quantité $X_s^\rho \rho_s^i$ correspond ici à la définition donnée à π_s^i

dans le cas exponentiel, à savoir la quantité d'argent investie à la date s dans l'actif i. On déduit alors à partir de l'équation du processus X^ρ donnée dans la définition 3.3 la forme intégrée :

$$\forall\, t \leq s \leq T,\ X_s^\rho := x \exp\Big(\int_t^s \rho_u dM_u - \tfrac{1}{2}\int_t^s \rho_u^{'} d\langle M\rangle_u \rho_u + \int_t^s \rho_u^{'} d\langle M\rangle_u \lambda_u\Big)$$

$$= x\mathcal{E}_{t,s}(\rho\cdot M)\exp(\textstyle\int_t^s \rho_u^{'} d\langle M\rangle_u \lambda_u),$$

où on conserve la notation $\mathcal{E}_{t,s}$, prise à la page 88 de la section 3.1.2, dans le cas de l'utilité exponentielle.
Désignant par U la fonction d'utilité (qui sera spécifiée dans chacune des sections 3.2.2 et 3.2.3), le problème consiste à donner l'expression de la fonction valeur, notée $V_t(x)$ et définie à la date t par :

$$V_t(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\tilde{\mathcal{A}}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(U(X_T^{\rho,t,x})), \tag{3.10}$$

où $\tilde{\mathcal{A}}_t$ représente l'ensemble des stratégies $\rho = (\rho_s)_{s\in[t,T]}$ admissibles : cette notion reste à définir pour chacun des deux problèmes associés aux utilités logarithme et puissance et elle est spécifiée dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3 qui suivent. Elle fournit en particulier une condition d'intégrabilité assurant que l'expression du problème donné par (3.10) a un sens.

Dans les sous sections qui suivent, on distingue les problèmes d'optimisation attachés aux deux fonctions d'utilité classiques suivantes :

- L'utilité puissance définie pour tout réel $\gamma \in]0,1[$ par : $U_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$. ($\gamma$ étant désormais fixé, on écrira dans la suite U^1 au lieu de U_γ).
- L'utilité logarithme est donnée simplement par : $U^2(x) = \ln(x)$.

3.2.2 Utilité puissance :

On commence par définir la notion de stratégie admissible reliée au problème (3.10) ayant $U = U^1$ comme fonction d'utilité et de fonction valeur $V^1(x)$.

Définition 3.4 *L'ensemble des stratégies admissibles $\tilde{\mathcal{A}}_t$ regroupe tous les processus ρ d-dimensionnels et prévisibles $\rho = (\rho_s)_{s\in[t,T]}$ satisfaisant : $\rho_s \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, ainsi que la condition :*

$$\int_t^T \rho_s^{'} d\langle M\rangle_s \rho_s = \int_t^T |m_s\rho_s|^2 dC_s < \infty,\ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Cette condition entraine que l'intégrale stochastique suivante : $\mathcal{E}(\int_t^\cdot \rho dM)$, est bien définie, en tant que martingale locale positive, et on rappelle ci-après son expression :

$$\mathcal{E}(\int_t^\cdot \rho_s dM_s) = \exp\left(\int_t^\cdot \rho_s dM_s - \frac{1}{2}\int_t^\cdot \rho_s^{'} d\langle M\rangle_s \rho_s\right).$$

On peut dès lors donner la solution au problème (3.10) rattaché à la fonction utilité puissance U^1.

Théorème 3.2 *Soit $V_t^1(x)$ la fonction valeur à la date t reliée au problème de maximisation de l'utilité U^1 et dont la valeur en t est donnée par (3.10). Celle ci s'écrit sous la forme :*

$$V_t^1(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}\exp(Y_t). \tag{3.11}$$

Y représente la première composante de la solution $(Y,\ Z,\ L)$ de l'EDSR définie sur $[t,T]$ par :

$$Y_t = 0 - \int_t^T f^1(s, Z_s)dC_s + \int_t^T \frac{1}{2}d\langle L\rangle_s - \int_t^T Z_s dM_s - (L_T - L_t),$$

avec L qui est une martingale réelle orthogonale à M (i.e. $\langle L, M\rangle = 0$) et dont le générateur f^1 est défini, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, par :

$$\begin{aligned} f^1(s,z) = \inf_{\rho,\ \rho\in\mathcal{C}} & \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\left(|m_s(\rho - (\frac{z+\lambda_s}{1-\gamma}))|^2\right) \\ & - \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}|m_s(\frac{z+\lambda_s}{1-\gamma})|^2 - \frac{1}{2}|m_s z|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'autre part, il existe au moins une stratégie optimale ρ_1^* satisfaisant, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, $s \in [t,T]$,

$$(\rho_1^*)(s) \in arg\min_{\rho,\ \rho\in\mathcal{C}} |m_s(\rho - (\frac{Z_s+\lambda_s}{1-\gamma}))|^2. \tag{3.13}$$

Corollaire 3.2 *Comme pour le cas de l'utilité exponentielle, la fonction valeur $V_t^1(x)$ donnée par l'expression (3.11), qui est rattachée au problème d'optimisation pour la fonction d'utilité U^1, satisfait le principe de programmation dynamique, à savoir :*

$$\forall\ \sigma,\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\ \sigma \leq \tau\ V_\sigma^1(x) = \mathbb{E}(V_\tau^1(X_\tau^{\rho^*,\sigma,x})|\mathcal{F}_\sigma), \tag{3.14}$$

avec ρ^* une stratégie optimale (i.e satisfaisant la condition (3.13)).

Remarque et preuve du corollaire 3.2 Dans ce paragraphe, on considère le problème d'optimisation (3.10) rattaché à la fonction d'utilité U^1 à la date t : ce problème consiste à rechercher une expression de $V_t^1(x)$ et le théorème 3.2 assure l'existence d'une stratégie optimale et admissible ρ^*. Supposant ici que la méthode dynamique (MD) est bien justifiée, le processus R^{ρ^*}, qui est défini sous la forme $R^{\rho^*} := U^1(X^{\rho^*})e^Y$, est une martingale (le processus Y étant défini dans le théorème 3.2). On écrit alors le théorème d'arrêt de Doob pour ce processsus R^{ρ^*} et on retrouve alors l'énoncé du principe dynamique tel que formulé par (3.14) dans le corollaire et qui est à l'origine de la méthode de programmation dynamique.
Dans le paragraphe qui suit, on justifie les résultats du théorème 3.2.

Preuve du théorème 3.2 La preuve du problème d'optimisation (3.10) est similaire à celle donnée dans le cas de l'utilité exponentielle et on en donne les grandes lignes.

Application de la méthode dynamique

Dans un premier temps, on applique la méthode (MD) en introduisant une famille de processus pour lesquels on traduit une propriété de surmartingale appropriée. On suppose connu au moins un triplet (Y, Z, L) solution d'une EDSR de forme connue et dont on justifie ensuite l'existence. Dans un second temps, on exploite les propriétés des solutions de l'EDSR pour justifier l'emploi de (MD) et en déduire l'expression (3.11) fournie dans le théorème ainsi que l'existence d'une stratégie optimale.
La solution (Y, Z, L) satisfait

$$Y_t = 0 - \int_t^T f^1(s, Z_s)dC_s + \int_t^T \frac{1}{2}d\langle L\rangle_s - \int_t^T Z_s dM_s - (L_T - L_t).$$

On pose alors, pour toute stratégie ρ (définie sur $[t, T]$), $R^\rho := U^1(X^\rho)e^Y$ (en particulier, on obtient ainsi $R_t^\rho := U^1(X_t^\rho)e^{Y_t} = U^1(x)e^{Y_t}$). D'autre part, on écrit l'équation du processus X^ρ sous forme différentielle donnée dans la définition 3.3

$$X_s^\rho = x + \int_t^s X_u^\rho \rho_u dM_u + \int_t^s X_u^\rho (m_u\rho_u)'(m_u\lambda_u)dC_u.$$

D'autre part, puisque Y est solution de l'EDSR définie par les paramètres $(f^1, \frac{1}{2}, 0)$ comme défini dans le Théorème 3.2), l'expression de e^Y est donnée par :

$$e^{Y_s} = e^{Y_t} \exp\left(\int_t^s f^1(u, Z_u)dC_u + \frac{1}{2}\int_t^s |m_u Z_u|^2 dC_u\right)\mathcal{E}_{t,s}(Z \cdot M + L),$$

il résulte alors de calculs simples sur les exponentielles stochastiques, que l'expression du processus R^ρ, défini pour tout s, $s \in [t,T]$, par : $R^\rho_s = \frac{1}{\gamma}(X^\rho_s)^\gamma e^{Y_s}$, est :

$$R^\rho_s = R^\rho_t \frac{1}{\gamma}\mathcal{E}_{t,s}(((\gamma\rho + Z)\cdot M + L)e^{\bar{A}^\rho_s - \bar{A}^\rho_t}, \tag{3.15}$$

où le processus $\bar{A}^\rho$ est défini pour tout s, $s \in [t,T]$ par :

$$\begin{aligned}\bar{A}^\rho_s = \bar{A}^\rho_t + & \int_t^s \big(f^1(u,Z_u) + \frac{1}{2}|m_u Z_u|^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}|m_u\rho_u|^2\big)dC_u \\ & + \int_t^s \big(\gamma(m_u\rho_u)'(m_u(Z_u+\lambda_u))\big)dC_u.\end{aligned}$$

Dès lors et pour les mêmes raisons que dans la preuve du théorème 3.1 (cas de l'utilité exponentielle), une condition suffisante pour obtenir la propriété de surmartingale est d'imposer : $d\bar{A}^\rho \leq 0$, pour toute stratégie ρ. Ceci conduit ainsi à l'expression donnée par (3.12) pour le générateur f^1.

Justification de la méthode (MD)

Il ne reste qu'à justifier les hypothèses et calculs effectués précédemment. Tout d'abord, afin de prouver l'existence d'une solution à l'EDSR de type (Eq1) de paramètres $(f^1, \frac{1}{2}, 0)$, on vérifie aisément que le générateur f^1 satisfait les hypothèses requises, à savoir (H_1) et (H_2) :
d'une part, f^1 satisfait (H_1), puisque l'on a :

$$-\frac{\gamma(1-\gamma)}{2}|m_s(\frac{z+\lambda_s}{1-\gamma})|^2 - \frac{1}{2}|m_s z|^2 \leq f^1(s,z) \leq -\frac{1}{2}|m_s z|^2,$$

et comme, de plus, il est aisé de voir que l'on a :

$$|f^1(s,z^1) - f^1(s,z^2)| \leq \frac{\gamma}{(1-\gamma)}|m_s(z^1-z^2)|(2|m_s\lambda_s| + |m_s z^1| + |m_s z^2|),$$

on conclut donc que f^1 satisfait les hypothèses requises et qu'on a existence (et unicité) d'une solution à l'EDSR de paramètres $(f^1, \frac{1}{2}, 0)$.
Afin de prouver que la famille $(R^\rho)_{\rho\in\tilde{A}_t}$ satisfait l'ensemble des conditions données par (MD), il suffit d'assurer la dernière assertion (iii). La propriété de surmartingale du processus R^ρ, dont l'expression est fournie par (3.15), résulte alors des deux propriétés suivantes :

- d'une part, le processus suivant, défini sur $[t,T]$ par

$$\mathcal{E}_{t,\cdot}((\gamma\rho + Z)\cdot M + L),$$

est une martingale locale positive,
- d'autre part, du fait de la positivité de R^ρ et la condition sur A^ρ, on

déduit l'existence d'une famille de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt (τ_k) tels que, pour tout k, $(R^\rho_{t\wedge\tau_k})$ est une surmartingale. Par simple application du lemme de Fatou à cette famille de processus, on obtient donc, lorsque $k \to \infty$:

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_t,\ \forall\, t,\ s,\ t \leq s, \quad \mathbb{E}\big(R^\rho_s \mathbf{1}_A\big) \leq \mathbb{E}\big(R^\rho_t \mathbf{1}_A\big),$$

ce qui entraine que R^ρ est une surmartingale, ceci pour toute stratégie admissible ρ.

Conclusion pour le problème d'optimisation

Afin de justifier l'expression de la fonction valeur (3.11), il suffit de prouver l'existence d'une stratégie optimale notée ρ^* puis de prouver son admissibilité. Comme dans le cas de l'utilité exponentielle, la relation (3.13) à satisfaire entraine donc que $(m_s\rho^*)$ réalise la distance entre $m_s\frac{(Z_s+\lambda)}{(1-\gamma)}$ et $m_s\mathcal{C} := \{m_s\rho,\ \rho \in \mathcal{C}\}$ (le processus n'est pas nécessairement unique, car l'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas convexe). L'admissibilité d'une telle stratégie résulte alors du contrôle :

$$|m_s\rho^*| \leq |m_s\frac{(Z_s+\lambda)}{(1-\gamma)}| \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s,$$

et du caractère BMO de $Z \cdot M$ et de $\lambda \cdot M$). Par un raisonnement similaire à celui de la section 3.1, on obtient que R^{ρ^*} est une vraie martingale et, de ce fait, $\rho^* \in \tilde{\mathcal{A}}_t$. On traduit alors la condition de martingale pour obtenir l'expression de $V^1(x)$ à la date t en terme de la solution Y.

□

3.2.3 Utilité logarithme :

De même que dans la sous section 3.2.2 précédente, on commence par introduire la notion d'admissibilité adaptée à notre problème.

Définition 3.5 *L'ensemble des stratégies admissibles $\tilde{\mathcal{A}}_t$ regroupe tous les processus d-dimensionnels et prévisibles $\rho = (\rho_s)_{s\in[t,T]}$ satisfaisant : $\rho_s \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, ainsi que :*

$$\mathbb{E}\Big(\int_t^T \rho_s^{'} d\langle M\rangle_s \rho_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_t^T |m_s\rho_s|^2 dC_s\Big) < \infty.$$

Dès lors, la solution au problème (3.10) rattaché à la fonction d'utilité U^2 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.3 *La fonction valeur $V_t^2(x)$ associée au problème de maximisation de l'utilité logarithme $U^2 := \ln$ a pour expression :*

$$V_t^2(x) = \ln(x) + Y_t \tag{3.16}$$

où Y est la solution d'une EDSR (de condition terminale nulle) et s'écrivant :

$$Y_t = 0 - \int_t^T f^2(s)dC_s - \int_t^T Z_s dM_s - \int_t^T dL_s.$$

L'expression du générateur f^2 est la suivante :

$$f^2(s) = \inf_{\rho,\, \rho \in \mathcal{C}} \frac{1}{2}|m_s(\rho - \lambda_s)|^2 - \frac{1}{2}|m_s \lambda_s|^2. \tag{3.17}$$

Corollaire 3.3 *Utilisant les résultats du théorème 3.3, on obtient conjointement les résultats suivants pour le problème associé à l'utilité U^2 :*
- *La fonction valeur $V_t^2(x)$ satisfait le principe dynamique suivant :*

$$\forall\, \sigma,\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\ \sigma \leq \tau\ V_\sigma^2(x) = \mathbb{E}(V_\tau^2(X_\tau^{\rho^*,\sigma,x})|\mathcal{F}_\sigma), \tag{3.18}$$

où ρ^* est optimale au sens de la condition (iii) de (MD) et où la notation $X_\tau^{\rho^*,\sigma,x}$ signifie $X_\sigma^{\rho^*,\sigma,x} = x$.
- *Il existe au moins une stratégie optimale admissible et toute stratégie optimale ρ^* satisfait ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s)*

$$(\rho^*)(s) \in arg \min_{\rho,\, \rho \in \mathcal{C}} |m_s(\rho - \lambda_s)|^2. \tag{3.19}$$

Preuve du Théorème 3.3 Comme pour les deux autres problèmes d'optimisation, on met à nouveau en oeuvre la méthode dynamique afin d' exprimer la fonction valeur sous la forme (3.16) De façon analogue au cas de l'utilité puissance, on définit une famille adéquate de processus (R^ρ) à laquelle on applique la méthode (MD). On pose alors $R^\rho := \ln(X^\rho) + Y$ (processus défini sur $[t, T]$), où Y est solution de l'EDSR dont la forme est donnée dans le théorème 3.3 et on écrit la formule d'Itô pour le processus R^ρ ainsi défini (pour toute stratégie ρ admissible au sens de la définition 3.5). On commence par écrire la formule d'Itô pour la semimartingale $\ln(X^\rho)$

$$\ln(X_t^\rho) = \ln(x) + \int_0^t \rho_s dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t |m_s\rho_s|^2 dC_s + \int_0^t (m_s\rho_s)^{'}(m_s\lambda_s)dC_s,$$

et on redonne ci-dessous l'EDSR satisfaite par le processus Y

$$Y_t = 0 - \int_t^T f^2(s)dC_s - \int_t^T Z_s dM_s - \int_t^T dL_s.$$

Le processus R^ρ s'écrit donc sous la forme :

$$\ln(X_s^\rho) + Y_s = \ln(x) + Y_t + \int_t^s \big((\rho_u + Z_u)dM_u + dL_u\big) + A^2(s) - A^2(t),$$

où le processus A^2 est donné sous forme différentielle :

$$dA^2(s) = (f^2(s) - \frac{1}{2}|m_s\rho_s|^2 + (m_s\rho_s)^{'}(m_s\lambda_s))dC_s.$$

Définissant alors le générateur f^2 par (3.17), on peut aisément, au vu de l'expression du générateur qui est, dans ce cas particulier, indépendant de z, en conclure à l'existence au sens classique d'une solution (Y, Z, L), avec Y borné (un majorant de la norme de Y dans S^∞ est alors fourni par le lemme 2.2 donné en section 2.2.3, dans l'étape 3 de la preuve de l'existence), ainsi qu'au résultat suivant :

• $\ln(X^\rho) + Y$ est une surmartingale pour tout processus ρ tel que : $\rho := (\rho_s)_{s\in[t,T]} \in \tilde{\mathcal{A}}_t$.

• $\ln(X^{\rho^*}) + Y$ est une martingale, pour toute stratégie ρ^* optimale, i.e. satisfaisant (3.19).

D'autre part, l'existence d'une telle stratégie satisfaisant cette condition (3.19) d'optimalité est assurée par un argument de sélection mesurable et l'appartenance à l'ensemble d'admissibilité $\tilde{\mathcal{A}}_t$ résulte du contrôle suivant

$$|m_s(\rho^* - \lambda_s)| \leq |m_s\lambda_s|,$$

contrôle qui est satisfait puisque la sratégie ρ, telle que : $\rho \equiv 0$, est à valeurs dans $\mathcal{C}$. A nouveau, une telle stratégie ρ^* n'est pas nécessairement unique, car $\mathcal{C}$ est seulement fermé et non convexe. La formulation du principe dynamique donnée par (3.18) résulte de l'application du théorème d'arrêt de Doob à la martingale $\ln(X^{\rho^*}) + Y$.

□

3.3 Prix d'indifférence vis à vis de l'utilité

En complément de cette section, on introduit ici les notions de prix et de stratégie d'indifférence pour l'utilité exponentielle en les explicitant dans notre cadre (des compléments utiles sur ces notions peuvent être trouvés dans [BEC06] ou aussi dans [MAN05]). Dans ces articles, ces notions sont traitées à l'aide de résultats de dualité, consistant à considérer une formulation duale du problème d'optimisation en introduisant notamment la notion de mesure équivalente de martingale.

On utilise toujours l'expression de la fonction valeur V_t^B à la date t fournie au début du chapitre 3 et rattachée au problème (3.1) (introduit en section 0.3.2) d'actif contingent noté B (la notation V^0 vaut pour le problème d'optimisation avec $B := 0$) et on définit ci-après le processus de prix d'indifférence ψ comme étant la solution de :

$$V_t^B(x + \psi_t) = V_t^0(x). \tag{3.20}$$

Cette équation définit implicitement le processus réel ψ et elle met en relation deux problèmes de maximisation de l'utilité : d'un point de vue financier, le processus ψ considéré à la date t représente la quantité d'argent que l'agent doit avoir en sus de x, afin que l'utilité (exponentielle) à l'échéance T du problème d'optimisation et de payoff B soit égale à celle du problème d'optimisation avec même richesse initiale x mais de payoff nul. Dans le cas de l'utilité exponentielle de paramètre α (à savoir $U_\alpha(\cdot) := -\exp(-\alpha\cdot)$, avec $\alpha > 0$) qui est le cas qui nous intéresse, ce prix d'indifférence est indépendant de la richesse (initiale) de l'agent. Ce prix d'indifférence, qui appartient à l'ensemble des prix assurant la condition de non arbitrage, satisfait diverses propriétés dont la convexité par rapport à B et la croissance par rapport à α : il a notamment été étudié en détail dans un cadre brownien par [ELK00], article dans lequel la liste de ces propriétés majeures est énumérée (on renvoie à la proposition 5.1 de cet article).

Expression du prix d'indifférence

Théorème 3.4 *Se référant ici aux résultats établis dans le théorème 3.1, les solutions $\psi := \psi^{B,\alpha}$ and $\pi := \pi^{B,\alpha}$, correspondants respectivement aux problèmes de calcul du prix et de la stratégie de couverture indifférents vis à vis de l'utilité U_α, peuvent être exprimées en terme de :*

$$(Y^{B,\alpha}, Z^{B,\alpha}, L^{B,\alpha}) \text{ et de } (Y^{0,\alpha}, Z^{0,\alpha}, L^{0,\alpha}).$$

Ces deux derniers triplets sont les solutions dans $S^\infty \times L^2(d\langle M\rangle \times d\mathbb{P}) \times \mathcal{M}^2([0,T])$ des EDSR de type (Eq1) de paramètres respectifs (F^α, α, B)

et (F^α, α, 0), où l'expression du générateur F^α est donnée par l'équation (3.6). Le processus d'indifférence vis à vis de l'utilité est alors donné par :

$$\psi = Y^{B,\alpha} - Y^{0,\alpha}, \tag{3.21}$$

ce processus est une semimartingale dont la décomposition est donnée par

$$\psi_t - B = (A_T - A_t) - \int_t^T \pi_s dM_s - (\tilde{L}_T - \tilde{L}_t),$$

où $\tilde{L}$ est une martingale réelle orthogonale à M et où la stratégie de couverture $\pi := \pi^\alpha$ indifférente vis à vis de l'utilité est déterminée uniquement (à indistinguabilité près) par :

$$\pi = Z^{B,\alpha} - Z^{0,\alpha}.$$

Preuve du théorème 3.4 On donne ici une justification de ce théorème à l'aide des résultats théoriques établis sur les EDSR quadratiques. Utilisant tout d'abord les résultats du théorème 3.1 concernant la résolution du problème d'optimisation (3.1), on peut écrire :

$$V_t^B(x + \psi_t) = U_\alpha(x + \psi_t - Y_t^{B,\alpha}) \;\text{ et }\; V_t^0(x) = U_\alpha(x - Y_t^{0,\alpha}).$$

Comparant alors les expressions fournies par les deux égalités précédentes et d'après la bijectivité de la fonction exponentielle que :

$$\psi_t = Y_t^{B,\alpha} - Y_t^{0,\alpha}.$$

D'autre part, on note $(Y^{B,\alpha}, Z^{B,\alpha}, L^{B,\alpha})$ et $(Y^{0,\alpha}, Z^{0,\alpha}, L^{0,\alpha})$ les solutions uniques des EDSR suivantes :

$$\begin{cases} Y_t^{B,\alpha} = B + \int_t^T F^\alpha(s, Z_s^{B,\alpha})dC_s + \frac{\alpha}{2}(\langle L^{B,\alpha}\rangle_T - \langle L^{B,\alpha}\rangle_t) - (K_T^\alpha - K_t^\alpha), \\ \text{avec : } K_t^\alpha - K_0^\alpha = \int_0^t Z_s^{B,\alpha} dM_s + L_t^{B,\alpha}, \\ \\ Y_t^{0,\alpha} = \int_t^T F^\alpha(s, Z_s^{0,\alpha})dC_s + \frac{\alpha}{2}(\langle L^{0,\alpha}\rangle_T - \langle L^{0,\alpha}\rangle_t) - (K_T - K_t) \\ \text{avec : } K_t - K_0 = \int_0^t Z_s^{0,\alpha} dM_s + L_t^{0,\alpha}. \end{cases}$$

Puis, on introduit les notations suivantes :

$$\delta Y = Y^{B,\alpha} - Y^{0,\alpha},\ \delta Z := Z^{B,\alpha} - Z^{0,\alpha} \text{ et } \delta L = L^{B,\alpha} - L^{0,\alpha}.$$

Par soustraction des deux équations précédentes, on obtient alors

$$\delta Y_t - B = (A_T^\alpha - A_t^\alpha) - \int_t^T \delta Z_s dM_s - \int_t^T \delta L_s,$$

où A^α est un processus à variation finie défini comme suit :

$$A_t^\alpha = \int_0^t \big(F^\alpha(s, Z_s^{B,\alpha}) - F^\alpha(s, Z_s^{0,\alpha})\big)dC_s + \frac{\alpha}{2}\langle L^{B,\alpha} + L^{0,\alpha}, \delta L\rangle_t.$$

Par unicité de la décomposition de Galchouk-Kunita-Watanabe de la martingale $\delta Y - A^\alpha$, on obtient que la stratégie d'indifférence π est donnée par l'expression : $\pi = Z^{B,\alpha} - Z^{0,\alpha}$.
D'autre part, du fait de l'hypothèse (H_2) sur les accroissements du générateur F^α et de l'expression du processus κ défini dans la preuve de l'unicité, le processus δY satisfait encore l'équation :

$$\delta Y_t - B = -\int_t^T (\delta Z)_s d\tilde{M}_s - \big(\tilde{\delta L}_T - \tilde{\delta L}_t\big),$$

où l'on a simplement posé :

$$\tilde{M} = M - \langle \kappa \cdot M, M\rangle \;\text{ et } \tilde{\delta L} = \delta L - \langle \delta L, \frac{\alpha}{2}(L^{B,\alpha} + L^{0,\alpha})\rangle.$$

Posant alors : $d\mathbb{Q}^\alpha = \mathcal{E}(\kappa \cdot M + \frac{\alpha}{2}(L^{B,\alpha} + L^{0,\alpha}))d\mathbb{P}$, on obtient ainsi une mesure équivalente de martingale (ce qui se justifie aisément à l'aide du théorème de Girsanov et grâce aux estimations données par le lemme 2.1, ainsi que par le contrôle de κ). Ceci conduit alors à la représentation suivante du processus d'indifférence vis à vis de l'utilité

$$\psi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\alpha}(B|\mathcal{F}_t).$$

En particulier, on précise ci dessous quelques propriétés connues de ce processus (déjà énoncées par exemple dans [MAN05] et [BEC06])

- On obtient le contrôle suivant (cf Lemme 6 dans [MAN05])

  $$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B|\mathcal{F}_t) \le \psi_t \le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B|\mathcal{F}_t),$$

  où $\mathcal{P}_e$ consiste en l'ensemble des mesures équivalents de martingales. Il est clair également que : $-|B|_\infty \le \psi \le |B|_\infty$, ce qui est vrai $\mathbb{Q}^\alpha$-p.s. et, $\mathbb{P}$-p.s., du fait de l'équivalence entre les deux mesures.

- Exploitant la représentation (3.21) le processus ψ est indépendant de la richesse initiale x de l'agent. De plus, du fait du théorème 2.2 de comparaison, l'application $B \to Y^{B,\alpha}$ est croissante, dont il résulte que le processus $\psi := \psi^{B,\alpha}$ est également croissant par rapport au payoff B.

Avant de passer à la preuve de résultats asymptotiques, on donne une remarque concernant cette représentation : cette formule “explicite” n'implique pas la linéarité du prix d'indifférence vis à vis de B : en effet, le point essentiel à remarquer est que la densité de la mesure $\mathbb{Q}^\alpha$ dépend elle même de B, car elle fait intervenir les processus $Y^{B,\alpha}$, $Z^{B,\alpha}$ et $U^{B,\alpha}$, qui sont solution de l'EDSR de condition terminale B.

Comportement asymptotique du prix d'indifférence

L'objectif consiste à retrouver ici des résultats déjà établis dans des cadres d'étude assez similaires : on peut citer l'article [BEC06], dans lequel sont établis des résultats (à l'aide de l'outil EDSR) mais ceux ci sont obtenus sans hypothèses de contraintes sur le portefeuille, ce qui entraine une expression simplifiée des générateurs. Des résultats ont aussi été obtenus dans le contexte de filtration continue très générale mais, dans leur étude, les auteurs utilisent des formules de dualité pour conclure à l'expression de ce prix d'indifférence. Dans cette étude préliminaire, on ne traite que le cas où α tend vers zéro et où le paramètre λ est égal à zéro (autrement dit la probabilité dite risque neutre coincide avec notre probabilité $\mathbb{P}$). Dans ce cadre, on justifie alors que le résultat suivant est vérifié :

$$\sup_t |\psi_t^{B,\alpha} - \mathbb{E}(B|\mathcal{F}_t)| \to 0,$$

et, pour ce faire, on procède en justifiant deux résultats de convergence :

$$\sup_t |Y_t^{B,\alpha} - \mathbb{E}(B|\mathcal{F}_t)| \to 0 \text{ et } \sup_t |Y_t^{0,\alpha}| \to 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Ceci résulte de la manipulation précise des estimations des normes des solutions $Y^{B,\alpha}$, $Z^{B,\alpha}$ et $L^{B,\alpha}$ (resp. $Y^{0,\alpha}$, $Z^{0,\alpha}$ et $L^{0,\alpha}$) à l'EDSR(F^α, α, B) de type (Eq1) (resp. à l'EDSR(F^α, α, 0)). On note que la seconde convergence est une conséquence directe de la première (obtenue en remplaçant la condition terminale B par zéro).
On rappelle ci-dessous la forme des EDSR satisfaites par $Y^{B,\alpha}$ et $Y^E := \mathbb{E}(B|\mathcal{F}_t)$:

$$\begin{aligned} Y_t^{B,\alpha} - B = & \int_t^T F^\alpha(s, Z_s^{B,\alpha}) dC_s + \frac{\alpha}{2}(\langle L^{B,\alpha}\rangle_T - \langle L^{B,\alpha}\rangle_t) \\ & - \int_t^T Z_s^{B,\alpha} dM_s - \int_t^T dL_s^{B,\alpha}, \end{aligned}$$

et d'autre part, on a la décomposition suivante de la martingale $\mathbb{E}(B|\mathcal{F}_t)$ (par rapport à M, qui est une martingale locale continue)

$$\mathbb{E}(B|\mathcal{F}_t) = B - \int_t^T Z_s^B dM_s - (L_T^B - L_t^B).$$

Pour justifier le résultat de convergence désiré, on procède comme suit :
(a) on montre tout d'abord l'existence d'estimations uniformes en α ($\alpha \in [0,1]$) des processus $Y^{B,\alpha}$, $Z^{B,\alpha}$ et $L^{B,\alpha}$.
(b) On applique la formule d'Itô au processus $\psi^{B,\alpha} := |Y^{B,\alpha} - Y^E|^2$ et on le majore, uniformément en t, lorsque α tend vers 0.
Afin de prouver (a), on applique la formule d'Itô au processus $\Phi(Y^{B,\alpha} +$

$|B|)$, où l'on pose : $\Phi(x) = e^x - 1 - x$. On exploite les résultats du lemme 2.1 au cas particulier de l'EDSR de paramètres (F^α, B, α). Le paramètre a qui est associé à (H_1) étant nul (puisque : $\lambda \equiv 0$), on peut affirmer que : $|Y^{B,\alpha}| \leq |B|_\infty$, $\mathbb{P}$-p.s. Exploitant la propriété : $\Phi^{'} - \Phi^{''} = -1$, la bornitude du processus $Y^{B,\alpha} - Y^E$ (valable uniformémement en t) ainsi que le fait : $\alpha \in [0,1]$, on aboutit, après des calculs élémentaires, au résultat suivant :

$$\Phi(Y_t^{B,\alpha} + |B|_\infty) \; + \; \tfrac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\Big(\int_t^T |m_s Z_s^{B,\alpha}|^2 dC_s \quad + \frac{1}{2}\big(|L_T^{B,\alpha} - L_t^{B,\alpha}|^2\big)$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\big(\Phi(2|B|_\infty)\big).$$

Désormais, en procédant comme indiqué par l'assertion (b), on obtient le contrôle suivant :

$$\begin{aligned} \psi_t^{B,\alpha} \;&\leq\; \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(2\int_t^T (Y_s^{B,\alpha} - Y_s^E) F^\alpha(s, Z_s^{B,\alpha}) dC_s\right) \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\big(2\int_t^T \frac{\alpha}{2}(Y_s^{B,\alpha} - Y_s^E) d\langle L^{B,\alpha}\rangle_s\big). \end{aligned}$$

Il résulte donc, d'une part, des contrôles uniformes suivants

$$\forall\, \alpha \in [0,1], \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{t\in[0,T]} |Y_t^{B,\alpha} - Y_t^E| \leq 2|B|_\infty \\ \\ \tfrac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\int_t^T |m_s Z_s^{B,\alpha}|^2 dC_s + \; |L_T^{B,\alpha} - L_t^{B,\alpha}|^2\right) \leq \Phi(2|B|_\infty), \end{array}\right.$$

et, d'autre part, de la majoration suivante de F^α : $|F^\alpha(s,z)| \leq \frac{\alpha}{2}|m_s z|^2$, que l'on peut alors affirmer :

$$\sup_t |\psi_t^{B,\alpha}| = \sup_t |Y_t^{B,\alpha} - Y_t^E|^2 \to 0, \; \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad \text{lorsque } \alpha \to \; 0,$$

ce qui est le résultat voulu.

$\square$

Troisième partie

Étude en filtration DISCONTINUE

Chapitre 4

Introduction

Dans cette seconde partie, on se place dans le contexte d'une filtration discontinue sur laquelle on considère un nouveau modèle de marché financier. L'objectif, qui est aussi la motivation principale de l'étude théorique, est d'étudier le problème de maximisation de l'utilité et, dans toute cette partie, on se consacre à l'utilité exponentielle. Afin de résoudre ce dernier problème, on est amené à considérer une classe d'EDSR avec sauts et à croissance quadratique : l'étude théorique de cette classe d'EDSR avec sauts et à croissance quadratique fait l'objet du chapitre 5 suivant.

4.1 Motivation et description de l'étude

On considère $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé standard muni de deux processus stochastiques indépendants : à savoir un mouvement brownien standard unidimensionnel et un processus ponctuel de Poisson. On note $\mathcal{F}$ la filtration naturelle engendrée par ces deux processus indépendants et complétée et qui satisfait les hypothèses "usuelles" de continuité à droite et de complétude (pour une définition précise, on renvoie à [PRO]). L'espace probabilisé filtré ainsi construit est appelé espace de Wiener-Poisson, espace dont une propriété essentielle est celle de représentation prévisible des martingales. Sur cet espace, on précise dans un premier temps la notion d'EDSR à sauts en expliquant, notamment, ce qu'est alors une solution et dans quel espace se fait la recherche de solutions. Dans le cadre dit "classique" (c'est-à-dire, essentiellement, lorsque le générateur est lipschitzien), ce type d'EDSR avec sauts a été étudié dans [BARL97a] et [ROY03]. On se réfèrera à ce dernier article, dont on utilisera les résultats d'existence et d'unicité ainsi que le résultat de comparaison (ces résultats sont énoncés au théorème 0.2 et 0.3 de l'introduction) : la référence à un résultat de comparaison est justifiée, puisque l'on se place dans le cas d'EDSR unidimensionnelles.

Notre contribution consiste à étudier sous l'hypothèse de croissance quadratique les problèmes d'existence et d'unicité de solutions à ce type d'EDSR.

Dans ce but, nous sommes amenés à donner des hypothèses très précises sur les paramètres de l'EDSR : comme lors de l'étude menée dans la partie précédente (i.e. en filtration continue), la condition terminale est supposée bornée et l'objectif est alors de donner des conditions particulières sur le générateur, de façon à obtenir des résultats d'existence et/ou d'unicité. Dans la partie théorique, on adapte ainsi les méthodes obtenues dans le cadre brownien, afin de résoudre à la fois le problème de la présence de sauts ainsi que la croissance quadratique en la variable z du générateur. Le modèle financier présenté dans cette partie est inspiré des résultats de l'article [BEC06] dans lequel la fitration sous jacente est aussi discontinue. Les différences notables entre cet article et le modèle étudié dans cette partie sont les suivantes :
• l'évolution du processus de prix est régie par une EDS purement brownienne (i.e. sans sauts, ce qui se traduit dans le cadre du modèle étudié et présenté en section 4.2.3 par l'hypothèse : $\beta \equiv 0$),
• la mesure de Lévy associée à la mesure aléatoire de Poisson est de masse finie,
• il n'y a pas de contraintes sur le portefeuille.
L'objectif de l'étude théorique menée au chapitre 5 est de s'affranchir de ces trois hypothèses.

Une des motivations de l'étude se trouve dans les applications en mathématiques financières. Nous considérons à nouveau le problème de la maximisation de l'utilité exponentielle d'un portefeuille : l'introduction d'une EDSR quadratique avec sauts résulte encore de la méthode dynamique (MD) introduite en section 0.3.2 et déjà employée dans [HU05]. Dans le modèle particulier étudié, on généralise ainsi les résultats de [BEC06] liés au problème de maximisation de l'utilité exponentielle dans le cas où on a présence de contraintes sur le portefeuille et où le processus de prix est solution d'une EDS, elle-même avec sauts. Toutefois, on restreint l'étude, en considérant une classe particulière de mesure aléatoire (à savoir, en prenant une mesure aléatoire de Poisson). D'autre part et dans un premier temps, on suppose, pour des raisons techniques, une condition de compacité sur l'ensemble des stratégies et on impose la finitude de la mesure de Lévy. Dans un second temps, on affaiblit les hypothèses prises et, plus précisément, on s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation sous les hypothèses suivantes :

- La mesure de Lévy n est seulement σ-finie.
- L'ensemble de contraintes (toujours noté $\mathcal{C}$) et dans lequel les stratégies prennent leur valeurs est supposé fermé et non plus compact.

Une limitation de l'étude menée est que la construction donnée dans la preuve de l'existence s'appuie fortement sur l'expression explicite du générateur, expression qui provient de la méthode dynamique.

4.2 Cadre et préliminaires

4.2.1 Le cadre théorique

On considére l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ muni des deux processus stochastiques indépendants suivants :

. Un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ standard et unidimensionnel.

. Un processus ponctuel de Poisson défini sur $[0,T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ à valeurs réelles et dont la mesure aléatoire associée $N_p(ds, dx)$ (à valeurs entières) est telle que son compensateur a la forme suivante :

$$\hat{N}_p(ds, dx) = n(dx)ds,$$

avec la mesure $n(dx)$ (notée n par la suite) est une mesure positive ne chargeant pas $\{0\}$ et qui est, sauf mention contraire, supposée finie.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{F}$ la filtration naturelle engendrée par ces deux processus et complétée par $\mathcal{N}$, ensemble formé par la famille des négligeables de $\mathbb{F}$. D'autre part, conservant les notations de la section 0.2 de l'introduction, la mesure compensée $\tilde{N}_p(ds, dx)$ ($\tilde{N}_p(ds, dx) := N_p(ds, dx) - \hat{N}_p(ds, dx)$) désigne l'unique mesure (aléatoire) prévisible telle que, pour tout processus F prévisible et de carré (localement) intégrable, l'intégrale stochastique $\displaystyle\int F_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx)$ est une martingale (de carré localement intégrable).

L'espace $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}, W, \tilde{N}_p)$ ainsi construit est appelé espace de Wiener-Poisson. On insiste ici sur une propriété fondamentale de cette espace : le couple $(W, \tilde{N}_p)$ possèdent la propriété de représentation prévisible des martingales, c'est-à-dire que toutes les $\mathcal{F}$ martingales K de carré (localement) intégrable de la filtration s'écrivent sous la forme :

$$K_t = K_0 + (Z \cdot W)_t + (U \cdot \tilde{N}_p)_t,$$

avec Z et U qui sont des processus prévisibles et de carré (localement) intégrables et à valeurs respectives dans les espaces $\mathbb{R}$ et $L^2(n(dx))$, où ce dernier est défini comme suit :

$$L^2(n(dx)) = \{u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |u(x)|^2 n(dx) < \infty\},$$

et où les notations suivantes : $Z \cdot W$ et $U \cdot \tilde{N}_p$, désignent les intégrales stochastiques de ces processus respectivement par rapport au brownien W et à la mesure aléatoire compensée $\tilde{N}_p(ds, dx)$. D'autre part, on introduit $L^\infty(n)$ comme étant l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \to u(x)$ à valeurs bornées et on munit cet espace de la topologie de la convergence en mesure.

4.2.2 Préliminaires

Le cadre étant posé, on présente dans cette section les objets d'étude ainsi que les notions théoriques essentielles pour établir les résultats. On rappelle la forme générale de la classe d'EDSR (à sauts) déjà introduite à la section 0.1.2

$$\text{(Eq2.1)} \quad \begin{cases} Y_t = B + \displaystyle\int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds \\ \qquad - \displaystyle\int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x) \tilde{N}_p(ds, dx). \end{cases}$$

Une solution de cette EDSR est un triplet (Y, Z, U) de processus satisfaisant (Eq2.1) et appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$, où ces espaces sont définis comme suit :

- $S^\infty = \{$Processus Y càdlàg tels que : $\operatorname*{esssup}_{t,\omega} |Y_t|) < \infty\}$.
  L'abbréviation càdlàg signifie que le processus Y possède des trajectoires qui sont $\mathbb{P}$-p.s. continues à droite et admettent des limites à gauche en tout point.

- $L^2(W) = \{$Processus Z prévisibles et à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfaisant
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds\right) < \infty\}.$$
- $L^2(\tilde{N}_p) = \{$Processus U $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$-mesurables et satisfaisant :
$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx) ds\right) < \infty\},$$

où $\mathcal{P}$ désigne la tribu prévisible et $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Dans toute la suite, on suppose que la condition terminale F est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, bornée et que f est indépendant de la variable y (ce qui est le cas dans notre application). Cette dernière condition peut être un peu affaiblie en supposant seulement une croissance au plus linéaire en y jointe à une condition de monotonie (M) (on renvoie à l'énoncé du théorème 0.2). Les processus Z et U solutions de l'EDSR (Eq2.1) sont prévisibles et de carré intégrable au sens où les intégrales stochastiques suivantes :

$$(Z \cdot W)_t = \int_0^t Z_s dW_s \quad \text{et} \quad (U \cdot \tilde{N}_p)_t = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x) \tilde{N}_p(ds, dx),$$

sont de carré intégrable.

Conformément aux rappels de la section 0.1.2 et notamment, au théorème

0.2, dont on conserve les notations, une solution classique d'une telle EDSR est définie comme étant un triplet de processus appartenant à :

$$S^2(\mathbb{R}) \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p).$$

Dans ce qui suit, ces résultats ne peuvent pas être appliqués, puisque l'EDSR qui nous intéresse possède un générateur qui n'est lipschitzien ni en z, ni en u (en particulier, on supposera une hypothèse de croissance quadratique par rapport à z). Ceci explique pourquoi on recherche des solutions avec le processus Y appartenant à $S^\infty := S^\infty(\mathbb{R})$.

Pour conclure cette section et avant d'énoncer les résultats que nous avons établis, on rappelle les notions et outils théoriques utiles à notre étude. Afin de pouvoir exploiter le critère de Kamazaki donnée au lemme 4.1 ci-dessous, on a besoin de la notion de martingale BMO. Cette notion introduite dans la définition 76 du chapitre 7 de [DEL80] est donnée dans la définition 0.1 : se référant à cette définition et puisque l'on considère des martingales M discontinues et de carré (localement) intégrable, une martingale M est dite BMO si elle satisfait les deux inégalités

$$\operatorname*{esssup}_{\Omega}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau) \leq c^2 \text{ et : } |\Delta M_\tau|^2 \leq c^2,$$

pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ, $\tau \leq T$ (ΔM_τ désigne le saut éventuel du processus M au temps τ). D'autre part, pour une martingale M de carré localement intégrable, on utilise la notation BMO(M) pour désigner l'ensemble des processus prévisibles U tels que l'intégrale stochastique $U \cdot M$ est une martingale BMO. Muni de cette définition de martingale BMO, on donne ci-dessous une condition suffisante pour que l'exponentielle stochastique (notée $\mathcal{E}(M)$) de la martingale M de carré intégrable, qui est définie par la formule de Doléans-Dade

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t)\prod_{s\leq t}(\exp(-\Delta M_s)(1+\Delta M_s)), \qquad (4.1)$$

soit une vraie martingale.

Lemme 4.1 ***(Critère de Kamazaki)*** *Soit δ tel que : 0 $< \delta < \infty$ et M une martingale BMO satisfaisant de plus : $\Delta M_t \geq -1+\delta$ pour tout t et $\mathbb{P}$-p.s., alors le processus $\mathcal{E}(M)$ est une vraie martingale.*

Remarque D'après la formule de Doléans-Dade, la martingale $\mathcal{E}(M)$ donnée par (4.1) est positive, dès que les sauts de M satisfont : $\Delta M > -1$. Sous cette hypothèse, il résulte d'arguments classiques que $\mathcal{E}(M)$ est une surmartingale. Pour les détails de la preuve du lemme 4.1, on renvoie à [KAZ]. Ce critère (de Kazamaki) est utile pour assurer que $\mathcal{E}(M)$ est une densité de probabilité et que l'application du théorème de Girsanov est justifiée. Ce dernier fait est l'une des clés essentielles de la preuve de l'unicité, puisqu'il permet de s'affranchir de la condition dite de Lipschitz sur le générateur.

4.2.3 Le problème d'optimisation étudié

Présentation

De façon analogue à la première partie de cette thèse, on présente le problème financier qui est étudié en spécifiant les particularités de l'étude théorique dans ce contexte de l'espace de Wiener-Poisson. L'un des objectifs du problème de maximisation de l'utilité exponentielle (associé à l'utilité $U_\alpha(.) := -\exp(-\alpha .)$ de paramètre α) est de caractériser la fonction valeur définie à la date t, (introduite en section 0.3.2) dont on rappelle ci-dessous l'expression

$$V_t^B(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}(U_\alpha(x + \int_t^T \pi_s \frac{dS_s}{S_{s-}} - B)|\mathcal{F}_t). \tag{4.2}$$

B désigne ici l'actif contingent, qui est, dans toute l'étude, une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée. Le processus de richesse $X^\pi := X^{\pi,t,x}$ est associé à une stratégie π, stratégie qui est un processus unidimensionnel défini sur $[t,T]$ et il satisfait

$$\forall\, s,\ t \le s \le T,\ X_s^\pi = x + \int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}}, \tag{4.3}$$

où S est le processus de prix de l'unique actif risqué. On précise à nouveau les définitions et significations financières des différents paramètres (nous reviendrons au chapitre 6 plus en détail sur les conditions particulières à imposer aux différents paramètres qui interviennent) :

- la fonction d'utilité U_α considérée est l'utilité exponentielle définie par : $U_\alpha(x) = -\exp(-\alpha x)$.

- Le processus S de prix de l'actif risqué sur le marché financier est une semimartingale de l'espace de Wiener-Poisson modélisée par l'EDS unidimensionnelle :

$$dS_s = S_{s-}\left(b_s ds + \sigma_s dW_s + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \beta_s(x)\tilde{N}_p(ds,dx)\right),$$

où les processus b, σ, β sont bornés et prévisibles et $\beta > -1$, de sorte que le processus S est à valeurs positives. Supposant que le processus σ (à valeurs réelles) ne s'annule pas, on définit de façon classique le processus θ comme suit : $\theta = (\sigma_s^{-1} b_s)$. Ce processus est lui aussi supposé borné, de sorte que la mesure $\mathbb{Q}^\theta$ définie par : $\frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_T(-\theta \cdot W)$ est une densité de martingale et si W^θ désigne le brownien obtenu par la transformation de Girsanov, le processus de prix S satisfait

$$dS_s = S_{s-}\left(\sigma_s dW_s^\theta + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \beta_s(x)\tilde{N}_p(ds,dx)\right).$$

- la variable $\mathcal{F}_T$-mesurable d'expression $(X^\pi_T - B)$ représente le portefeuille après livraison de l'actif B à la date T, dite date de maturité.

- $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des stratégies dites admissibles (cette notion est donnée par la définition 0.3) et en particulier, dans notre étude, on impose aux stratégies admissibles de prendre leurs valeurs dans l'ensemble de contraintes (noté $\mathcal{C}$) qui est supposé compact dans tout ce chapitre.

Afin de caractériser la fonction valeur V^B_t définie par (4.2) en terme de la solution d'une EDSR dont nous allons donner les paramètres dans le paragraphe qui suit, on exploite la méthode (MD) pour obtenir :

$$V^B_t(x) = U_\alpha(x - Y_t).$$

Le second résultat est l'existence d'une stratégie optimale π^* donc admissible au sens de la définition 0.3 (des précisions sur l'admissibilité sont apportées au chapitre 6 dans le lemme 6.1). On précise dès maintenant que, dans le cas où l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est compact, la condition d'admissibilité est automatiquement vérifiée. D'autre part, toute stratégie optimale π^* est caractérisée, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, par :

$$\pi^*_s \in \operatorname*{argmin}_{\pi\in\mathcal{C}} \big(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (Z_s + \frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |U_s - \pi\beta_s|_\alpha\big), \tag{4.4}$$

où, dans cette expression, les processus Z et U sont associés à la solution unique $(Y,\, Z,\, U)$ de l'EDSR (Eq2.1) donnée par $(f,\, B)$.

Mise en oeuvre de la méthode dynamique (MD)

De façon analogue au raisonnement mené à la section 3.1.2, on suppose connue une solution $(Y,\, Z,\, U)$ à l'EDSR à sauts (Eq2.1), dont la condition terminale est B et de générateur f à déterminer.

• Dans un premier temps, on effectue des calculs formels en écrivant la formule d'Itô pour le processus $\bar{R}^\pi := (\frac{R^\pi_s}{R^\pi_t})_{s\in[t,T]}$ où R^π est défini, pour toute stratégie $\pi := (\pi_s)_{t\leq s\leq T} \in \mathcal{A}_t$, par

$$\forall\ s,\ t \leq s \leq T,\ R^\pi_s = U_\alpha(X^\pi_s - Y_s) = -\exp(-\alpha(X^\pi_s - Y_s)),$$

avec X^π qui satisfait (4.3) : d'après la définition du processus et la caractérisation de R^π à la date t, on a l'écriture suivante

$$\forall\ \pi \in \mathcal{A}_t,\ R^\pi_t := -\exp(-\alpha(x - Y_t)).$$

• Dans un second temps, on met en oeuvre la méthode dynamique en traduisant la condition de sousmartingale pour le processus positif $\bar{R}^\pi$ et celle de martingale pour $\bar{R}^{\pi^*}$ où π^* désigne alors une stratégie optimale : ceci permet de caractériser explicitement le processus Y en tant que solution d'une EDSR.

On commence par donner sous forme différentielle l'équation satisfaite par le processus $-\alpha(X^\pi - Y)$

$$\begin{aligned} d(-\alpha(X_s^\pi - Y_s)) = \quad & -\alpha(\pi b_s + f(s, Z_s, U_s))ds \\ & \quad -\alpha(\pi\sigma_s - Z_s)dW_s - \alpha \textstyle\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(\pi\beta_s U_s)\tilde{N}_p(ds, dx)), \end{aligned}$$

puis on applique la formule d'Itô au processus $\bar{R}^\pi$

$$\begin{aligned} d\bar{R}_s^\pi &= \bar{R}_s^\pi\big(-\alpha(\pi_s\sigma_s - Z_s)\big)dW_s \\ &+\bar{R}_{s_-}^\pi \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\exp(-\alpha(\pi_s\beta_s(x) - U_s(x))) - 1)\tilde{N}_p(ds, dx)) \\ &-\alpha(\bar{R}_s^\pi(\pi_s b_s + f(s, Z_s, U_s)ds) + \frac{\alpha^2}{2}\big(\bar{R}_s^\pi|\pi_s\sigma_s - Z_s|^2 ds\big) \\ &+\bar{R}_s^\pi \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\exp(-\alpha(\pi_s\beta_s(x) - U_s(x))) - 1 + \alpha(\pi_s\beta_s(x) - U_s(x)))\hat{N}_p(ds, dx). \end{aligned}$$

Le processus $\bar{R}^\pi$ satisfait donc l'équation $dZ = Z_- dM^\pi + Z dA^\pi$, avec les processus M^π et A^π définis par

$$\text{et} \begin{cases} dA_s^\pi = \big(\frac{\alpha^2}{2}|\pi\sigma_s - Z_s|^2 - \alpha(\pi b_s + f(s, Z_s, U_s)) \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\exp(-\alpha(\pi\beta_s(x) - U_s(x))) - 1 + \alpha(\pi\beta_s(x) - U_s(x)))n(dx)\big)ds, \\ \\ M_s^\pi = \underbrace{(-\alpha(\pi\sigma - Z)\cdot W)_s}_{= M_s^1} + \underbrace{(\exp(-\alpha(\pi\beta - U)) - 1)\cdot \tilde{N}_p)_s}_{= M_s^2}, \end{cases}$$

où M^1 et M^2 représentent respectivement les parties martingales continues et discontinues de M^π. Le processus $\bar{R}^\pi$ admet aussi la décomposition sous forme multiplicative suivante : $\forall\, s \in [t, T], \quad \bar{R}_s^\pi = \tilde{M}_s^\pi \exp(A_s^\pi)$, où $\tilde{M}$ représente l'exponentielle stochastique de la martingale locale M^π. Afin de justifier que $\tilde{M}$ est une vraie martingale, on emploie la condition suffisante donnée par le lemme 4.1 : il suffit ainsi que la solution (Y, Z, U) de l'EDSR satisfasse

1 $Z\cdot W$ et $(\exp(-\alpha(\pi\beta - U)) - 1)\cdot\tilde{N}$ sont des martingales de classe BMO,

2 M^2 est à sauts bornés et supérieurs à $(-1 + \delta)$ (avec : $\delta > 0$).

D'autre part et pour obtenir la condition de sousmartingale du processus $\bar{R}^\pi$, il faut imposer la croissance du processus $\exp(A^\pi)$ apparaissant dans la décomposition multiplicative : ceci se traduit par une condition de positivité de la mesure dA^π

$$\frac{\alpha^2}{2}|\pi\sigma_s - Z_s|^2 - \alpha(\pi b_s + f(s, Z_s, U_s)) \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\exp(-\alpha(\pi\beta_s(x) - U_s(x))) - 1 + \alpha(\pi\beta_s(x) - U_s(x)))n(dx) \geq 0.$$

La condition de martingale (pour le choix d'une stratégie optimale π^*) se traduit en remplaçant l'inégalité par une égalité. Ces deux dernières conditions sont satisfaites pour le choix suivant du générateur f :

$$f(s, z, u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u - \pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha}, \quad (4.5)$$

où on introduit les notations $|\cdot|_\alpha$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|u|_\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\alpha u(x)} - \alpha u(x) - 1)n(dx) \text{ et } g_\alpha(x) := \frac{e^{\alpha x} - 1 - \alpha x}{\alpha}.$$

L'expression de f est alors bien définie dès lors que : $u \in (L^2 \cap L^\infty)(n)$ et $z \in \mathbb{R}$. Sous cette dernière hypothèse sur u et du fait de la bornitude des processus β et π (π étant à valeurs dans l'ensemble compact $\mathcal{C}$), le processus $u - \pi\beta_s$ appartient à $(L^2 \cap L^\infty)(n)$ et on obtient le contrôle suivant de $|u - \pi\beta|_\alpha := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_\alpha(u(x) - \pi\beta_s(x))n(dx)$ ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s)

$$\exists\, C_{\alpha,|u|_{L^\infty(n)}} > 0, \quad |u - \pi\beta_s|_\alpha \leq C_{\alpha,|u|_{L^\infty(n)}} |u - \pi\beta_s|^2_{L^2(n)},$$

ce qui assure que l'expression de f est bien définie.
(la constante notée $C_{\alpha,|u|_{L^\infty(n)}}$ dépend des normes dans $L^\infty(n)$ de β et de u et du paramètre α).

Chapitre 5

Etude théorique de l'EDSR

5.1 Premiers résultats théoriques

5.1.1 Propriétés

Dans cette section, on considère toujours l'espace de Wiener-Poisson introduit au chapitre précédent et on se place sous l'hypothèse $n(\mathbb{R}\setminus\{0\}) < \infty$. On cherche à résoudre l'EDSR à sauts donnée par l'équation (Eq2.1) avec les paramètres $(f,\, B)$ et dont l'expression explicite de f, déduite à la section précédente à l'aide de la méthode (MD), est fournie par (4.5)

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z+\frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |u-\pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha},$$

et où on a posé :

$$|u-\pi\beta_s|_\alpha := \int_{\mathbb{R}^*} \frac{e^{\alpha(u-\pi\beta_s)(x)} - 1 - \alpha(u-\pi\beta_s)(x)}{\alpha} n(dx).$$

D'après la section 4.2.3 précédente, cette expression est définie ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s) pour tout z et u respectivement dans $\mathbb{R}$ et $L^2\cap L^\infty(n)$. On rappelle ci-dessous la forme de l'EDSR étudiée dans ce chapitre :

$$Y_t = B + \int_t^T f(s,Z_s,U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(ds,dx).$$

Comme annoncé dans la section introductive 4.2.3, la condition terminale B est une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée et une solution à cette EDSR est un triplet de processus (Y,Z,U) appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$ tel que la quantité $\int_0^T |f(s,Z_s,U_s)|ds$ est presque sûrement finie.

Lemme 5.1 *On fait les hypothèses suivantes sur les différents paramètres introduits en section 4.2.3 et apparaissant dans l'expression (4.5) du générateur f :*
• *(i) L'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est compact et $0 \in \mathcal{C}$,*
• *(ii) les processus $\beta, \sigma,\ \theta$ sont prévisibles, bornés et $\beta > -1$.*
Sous ces hypothèses, le générateur f satisfait les conditions (H_1) et (H_2) suivantes :

$$(H_1) \quad \begin{array}{l} \forall\ z, u \in \mathbb{R} \times (L^2 \cap L^\infty)(n(dx)) \\ \qquad -(\theta_s z + \frac{|\theta_s|^2}{\alpha}) \le f(s, z, u) \le \frac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha. \end{array}$$

$$(H_2) \begin{cases} \exists C > 0, \kappa \in BMO(W),\ \forall\ z,\ z' \in \mathbb{R},\ \forall u \in L^2(n(dx)), \\ |f(s,z,u) - f(s,z',u)| \le C(\kappa_s + |z| + |z'|)|z - z'|; \\ \forall z \in \mathbb{R},\ \forall\ u, u' \in L^2 \cap L^\infty(n(dx)), \\ f(s,z,u) - f(s,z,u') \le \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma_s(u,u')(u(x) - u'(x))n(dx), \end{cases}$$

$$\text{avec } \gamma_s(u,u') :=$$

$$\sup_{\pi \in \mathcal{C}} \left(\int_0^1 g_\alpha^{'}(\lambda(u - \pi\beta_s) + (1-\lambda)(u' - \pi\beta_s)(x)) d\lambda \right) \mathbf{1}_{u \ge u'}$$

$$+ \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \left(\int_0^1 g_\alpha^{'}(\lambda(u - \pi\beta_s) + (1-\lambda)(u' - \pi\beta_s))(x) d\lambda \right) \mathbf{1}_{u < u'}.$$

Lemme 5.2 *Le processus γ issu de la linéarisation du générateur $f := f(s,z,u)$ par rapport à la variable u satisfait la propriété ci-dessous*

$$\forall\ P,\ \exists\ \bar{C}_P, \delta_P > 0, \quad \forall\ u, u' \in (L^2 \cap L^\infty)(n)\ t.q.\ |u|_{L^\infty(n)}, |u'|_{L^\infty(n)} \le P,$$

$$-1 + \delta_P \le \gamma(u,u') \le \bar{C}_P.$$

Preuve des deux lemmes

On vérifie que le générateur f d'expression (4.5) satisfait les conditions (H_1) et (H_2).
D'une part et du fait que $0 \in \mathcal{C}$, on obtient la borne supérieure pour f, à savoir

$$f(s,z,u) \le \frac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha.$$

D'autre part, on exploite la positivité de l'expression dont on prend l'infimum sur l'ensemble $\mathcal{C}$, afin d'obtenir

$$-z\theta - \frac{|\theta|^2}{2\alpha} \leq f(s,z,u) \leq \frac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha.$$

Afin de spécifier les paramètres introduits dans (H_2), il reste à étudier les accroissements du générateur. Du fait de la forme explicite du générateur, la condition sur les accroissements en z est trivialement satisfaite avec : $\kappa = |\theta|$, qui est un processus borné (et donc a fortiori dans BMO(W)) et $C = \frac{\alpha}{2}$. Dans un second temps et afin de préciser la forme des accroissements en la variable u, on rappelle la notation :

$$g_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x} - \alpha x - 1}{\alpha}.$$

On écrit alors la formulation intégrale des accroissements de la fonction g_α entre les réels $(u - \pi\beta)(x)$ et $(u^{'} - \pi\beta)(x)$ et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
& f(s,z,u) - f(s,z,u') \\
&\quad \leq \sup_{\pi \in C}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [g_\alpha((u - \pi\beta_s)(x)) - g_\alpha((u' - \pi\beta_s)(x)]n(dx))\right) \\
& \leq \sup_{\pi \in C}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [\int_0^1 g_\alpha^{'}(\lambda(u - \pi\beta_s) + (1-\lambda)(u' - \pi\beta_s))d\lambda](u - u')(x)n(dx)\right) \\
& \leq \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (u - u')(x)\gamma_s(u,u')(x)n(dx).
\end{aligned}$$

Dans la première inégalité et avant d'écrire les accroissements sous forme intégrale (à l'aide de la dérivée $g_\alpha^{'}$), on utilise la majoration suivante (sans valeurs absolues)

$$\inf_\pi A^\pi - \inf_\pi B^\pi \leq \sup_\pi \big(A^\pi - B^\pi\big).$$

Pour obtenir l'expression de $\gamma := (\gamma_s(u,u'))$, on utilise alors les deux assertions suivantes :

- $(u - u^{'})(x) = (u - u^{'})(x)\mathbf{1}_{u \geq u'} + (u - u^{'})(x)\mathbf{1}_{u < u'}$, d'une part,
- $-\sup_\pi(-A^\pi) = \inf_\pi A^\pi$, d'autre part,

ce qui permet donc d'affirmer que l'expression du processus γ est donnée par :

$$\gamma_s(u,u^{'}) = \sup_{\pi \in \mathcal{C}}\left(\int_0^1 g_\alpha^{'}(\lambda(u - \pi\beta_s) + (1-\lambda)(u' - \pi\beta_s))(x)d\lambda\right)\mathbf{1}_{u \geq u'}$$

$$+\inf_{\pi\in\mathcal{C}}\left(\int_0^1 g_\alpha^{'}(\lambda(u-\pi\beta_s)+(1-\lambda)(u'-\pi\beta_s))(x)d\lambda\right)\mathbf{1}_{u<u'}.$$

Pour conclure sur la propriété de ce processus énoncée au lemme 5.2, on exploite l'hypothèse de compacité sur $\mathcal{C}$ et la bornitude de β. Puisque u et u' sont à valeurs bornées dans $L^\infty(n)$ (la borne étant un réel P) et puisque $g_\alpha^{'}$ ne prend que des valeurs strictement supérieures à -1, la condition sur γ est automatiquement satisfaite, i.e.

$$\exists\ \delta_P, \bar{C}_P > 0,\ \text{t.q.} \quad -1+\delta_P \le \gamma_s(u,u') \le C_P.$$

□

Remarques aux lemmes

1. L'hypothèse (H_1) donne un contrôle de la croissance du générateur $f:(s,\omega,z,u)\to f(s,\omega,z,u)$. La majoration fait apparaitre un terme quadratique en la variable z ainsi que la fonction $|u|_K$ en la dernière variable u. D'autre part, cette dernière fonctionnelle $u\to|u|_K$ est, sous l'hypothèse complémentaire :

$$\exists\ M>0,\ |u|_{L^\infty(n)}\le M,$$

   équivalente au carré de la norme hilbertienne, à savoir

$$u\to|u|^2_{L^2(n)}=\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}|u(x)|^2 n(dx).$$

   Cette dernière quantité jouit des mêmes propriétés d'homogénéité et de convexité que : $z\to|z|^2$. Ceci sera utile, pour des raisons techniques, afin de justifier le raisonnement du résultat de stabilité qui est essentiel à la preuve du théorème 5.2 d'existence (résultat énoncé au paragraphe 5.1.2 suivant).

2. La condition (H_2) fournit des contrôles précis quant aux accroissements en les variables z et u du générateur f. Puisque ce dernier ne satisfait pas les conditions habituelles de régularité, on ne peut plus se référer aux théorèmes classiques pour obtenir un résultat de comparaison : ceci est l'une des raisons de l'introduction de la notion de martingale BMO. Cette notion est celle requise dans la dernière hypothèse technique sur les accroissements en la variable u et elle permet de justifier que $\mathcal{E}\left(\gamma\cdot\tilde{N}_p\right)$ est une vraie martingale (on renvoie au lemme 4.1). La dernière condition sur γ du lemme 5.2 est à rapprocher de l'hypothèse donnée dans le théorème 0.3 (section 0.2 de l'introduction).

5.1.2 Énoncé des résultats

Ces hypothèses étant désormais spécifiées, on donne l'énoncé des résultats principaux, à savoir les théorèmes d'existence et d'unicité.

Théorème 5.1 ***(Unicité)***
On considère l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(f,\ B)$, dont l'expression du générateur f est donnée par (4.5)

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u - \pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha},$$

et dont la condition terminale B est bornée. Sous les conditions de la section précédente (données par le lemme 5.1), cette EDSR possède au plus une solution $(Y,\ Z,\ U)$ dans l'espace $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$.

Théorème 5.2 ***(Existence)***
Si on considère l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(f,\ B)$ sous les mêmes conditions sur les paramètres f et F qu'au théorème 5.1, alors il existe au moins une solution à cette EDSR (appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$).

5.2 Preuve des résultats théoriques

5.2.1 Estimations à priori

L'objectif de cette section consiste à établir des estimations a priori précises de toute solution de l'EDSR (Eq2.1) de paramètres (g, B) où g est un générateur arbitraire qui satisfait (H_1).

Un lemme fondamental

On énonce ci-dessous le résultat qui fournit des estimations a priori précises de tout processus (Y, Z, U) solution d'une EDSR de paramètres $(g,\ B)$: les estimations données dans ce lemme sont essentielles dans les preuves des résultats d'existence et d'unicité. On note que les schémas de preuve sont analogues à ceux donnés dans la première partie de cette thèse.

Lemme 5.3 *On considère un générateur g satisfaisant (H_1) et B une condition terminale bornée. Pour toute solution $(Y,\ Z,\ U)$ de l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(g,\ B)$ et qui appartient à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$, on a les esti-*

mations suivantes, valables pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ,

(i) (a) $\exists\, C_1,\ C_2 > 0, \quad \forall\, s \in [0,T],\ C_1 \le Y_s \le C_2,\ \mathbb{P}\text{-}p.s.$

(b) $\forall\, s, |U_s|_{L^\infty(n)} \le 2|Y|_{S^\infty}$ *et* $|U_s|^2_{L^2(n)} \le 4n(\mathbb{R}\setminus\{0\})|Y|^2_{S^\infty},\ \mathbb{P}\text{-}p.s.$

$$(ii)\ \exists\, C_3,\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\big(\int_\tau^T |Z_s|^2 ds + \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx)ds\big) \le C_3,$$

où les constantes C_1, C_2 et C_3 ne dépendent que de $|B|_\infty$ ainsi que de $|\theta|_{L^\infty}$ et de α (ces deux paramètres apparaissant dans l'expression de $f(s,0,0)$).

Corollaire 5.1 *Reprenant les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent, pour toute solution $(Y,\ Z,\ U)$ de l'EDSR (Eq2.1) (appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$), on a le résultat d'équivalence suivant :*

$$\begin{aligned}\forall\, K, \quad \frac{1}{C_{K,2|Y|_{S^\infty}}}\mathbb{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx)ds &\le \mathbb{E}\int_0^T |U_s|_K ds \\ &\le C_{K,2|Y|_{S^\infty}}\mathbb{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx)ds. \quad (5.1)\end{aligned}$$

La notation $C_{K,2|Y|_{S^\infty}}$ signifie que la constante dépend du paramètre K (associé à $|\cdot|_K$) et de la norme du processus Y dans S^∞.

Une première remarque au lemme 5.3 est que les assertions (i)(b) et (ii) reposent toutes deux sur les estimations données des bornes (inférieures et supérieures) du processus Y solution. D'autre part, l'assertion (ii) jointe à la propriété (i)(b) de bornitude des sauts de la martingale $U \cdot \tilde{N}_p$ assure un contrôle des normes BMO des deux intégrales stochastiques $Z \cdot W$ et $U \cdot \tilde{N}_p$. Comme dans la première partie de la thèse, ces dernières estimations constituent le point de départ des résultats d'existence et d'unicité.

Preuve du corollaire et de l'assertion (i)(b) du lemme 5.3

Afin de justifier le résultat du corollaire, on commence par montrer l'assertion (i)(b), en supposant connue une solution (Y, Z, U) de l'EDSR (Eq2.1) et de paramètres (g, B). On utilise alors l'expression suivante des sauts de la semimartingale Y satisfaisant l'équation (Eq2.1)

$$|\Delta Y_t| = |Y_t - Y_{t-}| = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_t(x)| N_p(\{t\}, dx), \tag{5.2}$$

et on cherche à montrer l'existence d'au moins un choix de représentant prévisible $\tilde{U}$ du processus U, de sorte que $x \to \tilde{U}_t(x)$ satisfait : $|\tilde{U}_t|_{L^\infty(n)} \le$

$2|Y|_{S^\infty}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout t. Conformément aux notations de la section 0.1.2 de l'introduction, on exploite l'écriture suivante de l'intégrale par rapport à la mesure (croissante) de comptage

$$\int_{\mathbb{R}^*} |U_t(x)| N_p(\{t\}, dx) = |U_t(p(t))| \mathbf{1}_{(t \in D_p)}, \tag{5.3}$$

(l'ensemble aléatoire D_p représentant l'ensemble des instants de sauts du processus p). On définit alors le processus $\tilde{U}$ par

$$\tilde{U}_t(x) = U_t(x) \mathbf{1}_{|U_t(x)| \leq 2|Y|_{S^\infty}}.$$

Des relations (5.2) et (5.3), on déduit donc : $\tilde{U}_t(p(t))\mathbf{1}_{(t\in D_p)} = U_t(p(t))\mathbf{1}_{(t\in D_p)}$. On peut ainsi écrire

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(\tilde{U} - U)(s,x)|^2 \hat{N}_p(ds, dx)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{s \in D_p,\ s \leq T} |U(s, p(s)) - \tilde{U}(s, p(s))|^2\right) = 0.$$

Il en résulte donc l'égalité : $U = \tilde{U}$ (dans $L^2(\tilde{N}_p)$). Par abus et dans toute la suite, on confond les processus U et $\tilde{U}$ et désormais, on suppose que pour tout triplet (Y, Z, U) solution, le processus U satisfait : $|U_t|_{L^\infty(n)} \leq 2|Y|_{S^\infty}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout t.
Exploitant désormais l'hypothèse de finitude sur la mesure n ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit facilement le contrôle du carré de la norme hilbertienne dans $L^2(n)$ qui est donnée par l'assertion (i) (b) et qui implique donc :

$$\forall\, K,\ \exists\, C = C_{K,|Y|_{S^\infty}}, \quad \mathbb{E}\int_0^T |U_s|_K ds \leq C_{K,|Y|_{S^\infty}}.$$

Afin de conclure, on note que sous la condition $|Y|_{S^\infty} \leq M$, il existe une nouvelle constante C_M qui ne dépend que des estimations dans S^∞ du processus solution Y et telle que

$$\begin{aligned}\forall\, K > 0,\ \frac{1}{C_M}\mathbb{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx) ds &\leq \mathbb{E}\int_0^T |U_s(x)|_K ds \\ &\leq C_M \mathbb{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx) ds.\end{aligned}$$

Ce résultat d'équivalence (entre la fonctionnelle $|\cdot|_K$ et le carré de la norme hilbertienne dans $L^2(n(dx))$) est utile afin de prouver le résultat dit de "stabilité par monotonie " (énoncé au lemme 5.4) qui est inspiré d'un lemme similaire obtenu dans le cadre brownien dans [KOB]. Ce contrôle est essentiel, puisqu'il est beaucoup plus simple, pour des raisons d'ordre technique, de considérer le carré de la norme hilbertienne dans $L^2(n(dx))$ (plutôt qu'avec la fonctionnelle $|\cdot|_K$).

Preuve du Lemme 5.3

Afin d'établir l'assertion (i), on suppose qu'il existe une solution (Y, Z, U) à l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(g,\ B)$. Le processus Y appartient à S^∞ et on applique la formule d'Itô à la semimartingale $e^{\alpha Y}$ sous forme intégrée entre t et T :

$$e^{\alpha Y_t} - e^{\alpha B} = \int_t^T \alpha e^{\alpha Y_s}\Big(g(s, Z_s, U_s) - \frac{\alpha}{2}|Z_s|^2 - |U_s|_\alpha\Big)\, ds$$
$$- \int_t^T \alpha e^{\alpha Y_s} Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{\alpha Y_{s-}}(e^{\alpha U_s(x)} - 1)\tilde{N}_p(dx, ds).$$

Les deux derniers termes sont des martingales a priori seulement locales en tant qu'intégrales stochastiques respectivement par rapport à W et par rapport à la mesure compensée $\tilde{N}_p(ds, dx)$. On montre qu'en fait ce sont de vraies martingales. En effet, puisque, d'une part, (Y, Z, U) appartient à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$, le processus $e^{\alpha Y}$ est borné et, de ce fait, $e^{\alpha Y} Z \cdot W$ et $e^{\alpha Y} U \cdot \tilde{N}_p$ sont des martingales. D'autre part, comme U satisfait : $|U_s|_{L^\infty} \leq 2|Y|_{S^\infty}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s (ce résultat est justifié au paragraphe précédent), on en déduit l'existence d'une constante positive $C_{|Y|_{S^\infty}}$ ne dépendant que de $|Y|_{S^\infty}$ et telle que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |e^{\alpha Y_s}(e^{\alpha U_s} - 1)|^2 n(dx) ds \leq C_{|Y|_{S^\infty}} |U_s|^2_{L^2(n)}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

D'après ce contrôle et comme le processus U appartient à $L^2(\tilde{N}_p)$, la seconde intégrale stochastique apparaissant dans la formule d'Itô est elle-même une vraie martingale. Prenant alors l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ et utilisant la borne supérieure donnée par (H_1) pour g, on obtient alors :

$$e^{\alpha Y_t} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha B}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\Big(\int_t^T \alpha e^{\alpha Y_s} \underbrace{(g(s, Z_s, U_s) - \frac{\alpha}{2}|Z_s|^2 - |U_s|_\alpha)}_{\leq 0} ds\Big).$$

Puisque $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha B}) \leq e^{\alpha |B|_\infty}$, on obtient l'inégalité de droite de (i) en posant : $C_2 = |B|_\infty$. Afin d'obtenir celle de gauche, on utilise cette fois la borne inférieure donnée par (H_1) au générateur g, ce qui entraine :

$$
\begin{aligned}
Y_t = & B + \int_t^T g(s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx) \\
& \geq -|Y_T|_\infty - \int_t^T \big(\theta_s Z_s + \frac{|\theta_s|^2}{\alpha}\big)ds \\
& \quad - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx).
\end{aligned}
$$

On définit alors la mesure de probabilité $\mathbb{P}^\theta$ par

$$
d\mathbb{P}^\theta = \mathcal{E}_T(-\int_0^\cdot \theta_s dW_s)d\mathbb{P},
$$

et on obtient que $\mathcal{E}(-\int_0^\cdot \theta_s dW_s)$ est une vraie martingale, du fait que $\theta \cdot W$ est une martingale BMO. $\mathbb{P}^\theta$ est donc une mesure de probabilité équivalente sous laquelle : $W^\theta = W + \int_0^\cdot \theta_u du$, est encore un mouvement Brownien standard et $\tilde{N}_p$ est toujours une mesure de martingale. On procède par localisation en considérant alors une suite (τ^m) de temps d'arrêt (convergeant vers T) telle que $(\int_0^{\tau^m} Z_s dW_s^\theta)$ et $(\int_0^{\tau^m} \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx))$ sont des martingales sous $\mathbb{P}^\theta$. Prenant alors l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ et sous $\mathbb{P}^\theta$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
Y_{t\wedge\tau^m} = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}\big(Y_{t\wedge\tau^m}|\mathcal{F}_t\big) \\
\geq \; & \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}\left(Y_{\tau^m} - \int_{t\wedge\tau^m}^{\tau^m} \frac{|\theta_s|^2}{\alpha} ds|\mathcal{F}_t\right) \\
& -\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}\left(\int_{t\wedge\tau^m}^{\tau^m} Z_s dW_s^\theta - \int_{t\wedge\tau^m}^{\tau^m} \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx)|\mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}
$$

On applique le théorème de la convergence bornée à la suite de variables $(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}\left(Y_{\tau^m} - \int_{t\wedge\tau^m}^{\tau^m} \frac{|\theta_s|^2}{\alpha} ds|\mathcal{F}_t\right))_m$ pour en déduire

$$
\forall\, t, \qquad Y_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}\left(Y_T - \int_t^T \frac{|\theta_s|^2}{\alpha} ds|\mathcal{F}_t\right).
$$

Cette inégalité est vraie également $\mathbb{P}$-presque sûrement du fait de l'équivalence entre $\mathbb{P}^\theta$ et $\mathbb{P}$, et il en résulte que l'assertion (i) est satisfaite avec C_1 donné par : $C_1 = -|B|_{L^\infty} - \frac{|\theta|_{L^\infty}^2}{\alpha}T$. ($|\theta|_{L^\infty}T$ majorant $\int_0^T \theta_s ds$, grâce à la bornitude de θ) Avant de passer à la preuve de (ii), on compare ces estimations a priori avec celles établies au lemme 2.1 (dans la section 2.2.1 de la première partie en filtration continue) : il y a ici une dissymétrie entre les bornes supérieures et inférieures C_1 et C_2 obtenues pour (i). Celle ci provient des contrôles du générateur donnés par (H_1) qui entrainent que, contrairement au cadre continu, l'hypothèse (H_1) n'est plus satisfaite par $\tilde{g}(s,z,u) = -g(s,-z,-u)$. On ne peut donc plus appliquer le même raisonnement au processus $-Y$ pour obtenir la minoration. La raison est que la fonctionnelle en u suivante : $u \to |u|_\alpha$, n'est pas symétrique.

Pour justifier (ii), on applique la formule d'Itô au processus $(Y - C_2)^2$ (C_2 n'est autre que la borne supérieure donnée par (i)). On prend alors l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_\tau$ entre un temps d'arrêt arbitraire τ et T :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}((Y_\tau - C_2)^2 \, -(Y_T - C_2)^2) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\big(\int_\tau^T 2(Y_s - C_2)(g(s, Z_s, U_s))ds\big)$$

$$-\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\big(\int_\tau^T |Z_s|^2 ds\big) - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\big(\int_\tau^T \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} |U_s(x)|^2 n(dx)ds\big).$$

Utilisant à la fois (H_1) et la relation classique : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a :

$$\exists \; B_2 \; \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P}) \; - 2(Y_s - C_2)(-g)(s, Z_s, U_s) \leq B_2(s) + \frac{1}{2}|Z_s|^2,$$

où le processus noté B_2 est contrôlé par la constante C_2 ainsi que par le processus θ et α (grâce à la minoration dans (H_1)). Ce processus est donc borné ($\mathbb{P}$-p.s.) et il appartient à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$. A l'aide de calculs simples, il est aisé de trouver une constante C_3 telle que l'assertion (ii) soit satisfaite. D'autre part, en prenant $\tau \equiv 0$, on obtient que les processus Z et U sont bornés respectivement dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$ et cette borne ne dépend que des estimations du processus Y dans S^∞ ainsi que des paramètres associés à (H_1).

$\square$

5.2.2 Le résultat d'unicité

Preuve du Théorème 5.1

De façon analogue au raisonnement mené à la section 2.2.2 (dans la première partie), on utilise une procédure de linéarisation afin de pouvoir employer le théorème de Girsanov. Comme dans l'article [HU05], l'utilisation de ce dernier est justifiée dès que le caractère BMO de processus adéquats est assuré. On suppose connues deux solutions de l'EDSR (Eq2.1) caractérisée par $(f,\, B)$, où l'expression de f est donnée par (4.5). Ces deux solutions sont notées $(Y^1,\, Z^1,\, U^1)$ et $(Y^2,\, Z^2,\, U^2)$. Soit M une constante positive telle que, pour $i = 1,\, 2$, $|Y^i|_{S^\infty} \leq M$ (une expression de cette constante est fournie dans la preuve de l'assertion (i) du lemme 5.3). Pour plus de clarté, on introduit les notations suivantes :

$$\hat{Y} = Y^1 - Y^2,\ \hat{Z} = Z^1 - Z^2,\ \hat{U} = U^1 - U^2.$$

On considère alors un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt arbitraire τ et on écrit la formule d'Itô pour le processus $\hat{Y}$ entre $t \wedge \tau$ et τ (pour t fixé) :

$$\hat{Y}_{t\wedge\tau} - \hat{Y}_\tau = \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (f(s, Z_s^1, U_s^1) - f(s, Z_s^2, U_s^2))ds \\ - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} \hat{Z}_s dW_s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \hat{U}_s(x) \tilde{N}_p(ds, dx).$$

Puisque le générateur ne satisfait pas les conditions habituelles (il n'est lipschitzien ni en la variable z ni en u), on utilise les contrôles des accroissements donnés par (H_2). Afin de simplifier les notations, on introduit le processus $\lambda(Z^1, Z^2)$ suivant

$$\begin{cases} \lambda_s(Z_s^1, Z_s^2) &= \frac{f(s,Z_s^1,U_s^1) - f(s,Z_s^2,U_s^1)}{Z_s^1 - Z_s^2},\ \text{si } \hat{Z} \neq 0, \\ \lambda_s(Z_s^1, Z_s^2) &= 0, \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc l'écriture suivante des accroissements du générateur f

$$f(s, Z_s^1, U_s^1) - f(s, Z_s^2, U_s^2))$$

$$:= f(s, Z_s^1, U_s^1) - f(s, Z_s^2, U_s^1) + f(s, Z_s^2, U_s^1) - f(s, Z_s^2, U_s^2)$$

$$\leq \lambda_s(Z_s^1, Z_s^2)\hat{Z}_s + \int_{\mathbb{R}^*} \gamma_s(U_s^1, U_s^2)\hat{U}_s(x) n(dx),$$

où, d'une part, le processus λ satisfait :

$$|\lambda_s(Z_s^1, Z_s^2)| \leq C(\kappa_s + |Z_s^1| + |Z_s^2|),$$

et où, d'autre part, le processus γ a été introduit dans la condition (H_2). En particulier et grâce aux estimations a priori fournies par (i)(b) dans le lemme 5.3, on obtient que pour i=1, 2, $|U^i_s|_{L^\infty(n)} \leq 2|Y^i|_{S^\infty} \leq 2M$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s. D'après la condition (H_2), on obtient, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, le contrôle suivant :

$$\exists\ \delta_{2M} > 0,\ \bar{C}_{2M} > 0,\ \text{t.q.}\ -1 + \delta_{2M} \leq \gamma_s(U^1_s, U^2_s) \leq \bar{C}_{2M}.$$

Enfin, le caractère BMO de $\lambda \cdot W$ résulte de l'hypothèse sur κ donnée par (H_2) ainsi que du caractère BMO des intégrales stochastiques suivantes : $\int_0^\cdot Z^i dW_s$ (ce caractère BMO (valable pour $i = 1, 2$) a été établi dans la preuve de l'assertion (ii) du lemme 5.3). Définissant alors M^1 et M^2 comme suit :

$$M^1 = \lambda \cdot W \quad \text{et} \quad M^2 = \gamma \cdot \tilde{N}_p,$$

et posant : $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}_T(M^1 + M^2)d\mathbb{P}$, l'application du critère de Kazamaki (lemme 4.1) assure que $\mathcal{E}(M^1+M^2)$ est une vraie martingale, ce qui entraine que $\mathbb{Q}$ est une mesure équivalente de probabilité. On utilise une transformation de Girsanov en définissant de manière habituelle $W^\lambda = W - \langle W, \lambda \cdot W\rangle$ et $\tilde{N}^\gamma = \tilde{N}_p - \langle \tilde{N}_p, \gamma \cdot \tilde{N}_p\rangle$. Le processus M défini par :

$$M_t = \int_0^t \hat{Z}_s dW^\lambda_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \hat{U}_s(x)\tilde{N}^\gamma(ds, dx),$$

est donc une martingale locale sous $\mathbb{Q}$. Notant alors par (τ^n) une suite de temps d'arrêt telle que $(M_{\cdot\wedge\tau^n})$ soit une $\mathcal{F}$-martingale, il s'ensuit :

$$\hat{Y}_{t\wedge\tau^n} \leq \hat{Y}_{\tau^n} + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} \hat{Z}_s dW^\lambda_s + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \hat{U}_s(x)\tilde{N}^\gamma(ds, dx).$$

Supposant, sans restriction, que, pour tout n : $\tau^n \geq t$, (t étant fixé dans $[0, T[$) et prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{Q}$, on en déduit :

$$\hat{Y}_{t\wedge\tau^n} = \hat{Y}_t \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\hat{Y}_{\tau^n}|\mathcal{F}_t).$$

Il suffit de conclure, en faisant tendre n vers $+\infty$ et à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ce dernier s'applique puisque $\hat{Y}_{\tau^n}$ converge presque sûrement vers $\hat{Y}_T$ (avec : $\hat{Y}_T = 0$) et que le processus $\hat{Y}$ appartient à S^∞. Il s'ensuit : $\hat{Y}_t \leq 0$, $\mathbb{Q}$-p.s. et aussi $\mathbb{P}$-p.s., du fait de l'équivalence. Par symétrie du problème (quitte à échanger les rôles des solutions Y^1 et Y^2), on peut désormais affirmer que : $\hat{Y} = 0$, ce qui achève la preuve de l'unicité.

$\square$

5.2.3 Le résultat d'existence

Afin de justifier le résultat du théorème 5.2 concernant l'existence d'une solution à l'EDSR (Eq2.1) caractérisée par $(f,\, B)$ et, pour plus de clarté, on découpe le raisonnement qui suit en trois étapes. Insistons tout de suite sur le fait que, dans cette preuve constructive, on s'appuiera sur la forme explicite de notre générateur f (donnée par (4.5)) qui satisfait (H_1) et (H_2).
• La première étape consiste en la construction explicite d'une suite de générateurs (f^m) (construction basée sur l'expression (4.5) de f) possédant de bonnes propriétés (de régularité et de croissance).
• Dans une seconde étape, on déduit de cette construction l'existence de triplets $(Y^m,\, Z^m,\, U^m)$ qui sont les solutions (uniques) aux EDSR de paramètres (f^m, B) ainsi que quelques propriétés des processus ainsi construits.
• Dans une dernière étape, on conclut à l'aide des différentes propriétés établies à l'étape précédente (et en adaptant le résultat de stabilité par monotonie de [KOB]) à la convergence vers une solution $(\tilde{Y},\, \tilde{Z},\, \tilde{U})$ de l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$.

Etape 1 : Approximation par un argument de troncature :

L'objectif est de construire une suite d'EDSR donnée par les paramètres $(f^m,\, B)$ telle que, pour tout m, il existe une solution unique $(Y^m$, $Z^m,\, U^m)$ appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$.
On définit M par : $M := [2(|C_1| + |C_2|)] + 1$, où C_1 et C_2 sont les constantes fournies par l'estimation (i) du lemme 5.3 (pour P réel, la notation $[P]$ désigne la partie entière) et on introduit la suite (ρ_m) de fonctions (au minimum continûment différentiable) dites de troncature qui satisfait
(i) La suite (ρ_m) est croissante (par rapport à m).
(ii) $\rho_m(x) = 1$, si $|x| < m$,$0 \le \rho_m(x) \le 1$ si $m \le |x| < m+1$ et : $\rho_m(x) = 0$, si $|x| \ge m+1$.
On introduit alors la suite de générateurs (f^m) définie pour tout m, $m \ge M$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &f^m(s,z,u)\\ &= \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \big(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z+\frac{\theta_s}{\alpha})|^2\rho_m(z) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_\alpha(u-\pi\beta_s)(x)\rho_M(u(x))n(dx)\big)\\ &\qquad -\theta_s z - \tfrac{|\theta_s|^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

On fait tout de suite la remarque suivante : pour tout $u \in (L^2 \cap L^\infty)(n)$ tel que $|u|_{L^\infty} \le M$, on a l'égalité suivante qui est satisfaite

$$f^m(s,z,u) = f^m(s,z,\rho_M(u)), \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

On justifie alors l'ensemble des propriétés énoncées au théorème 0.2 pour chaque générateur de la suite (f^m)

1 Chaque générateur $f^m : (s, z, u) \to f^m(s, z, u)$ est lipschitzien (par rapport à z et u), au sens où, pour tout $m \geq M$, on a :

$$\exists\, C_{m,\,M} > 0, \;\; \forall\, t, \forall\, z, z^{'} \in \mathbb{R}, \; \forall\, u, u^{'} \in L^2(n),$$

$$|f^m(t, z, u) - f^m(t, z^{'}, u^{'})| \leq$$

$$C_{m,\,M} \left(|z - z^{'}| + (\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (u(x) - u^{'}(x))^2 n(dx))^{\frac{1}{2}} \right).$$

Ce contrôle résulte de la troncature en z et en u et de la linéarisation des accroissements de $f^m := f^m(s, z, u)$, puisque ce dernier générateur satisfait une hypothèse analogue à (H_2).

2 Chaque f^m satisfait l'hypothèse de monotonie (H_{comp}) et la condition (A_γ) associée (on renvoie le lecteur au théorème 0.3 de l'introduction ou aussi au théorème 2.5 de l'article [ROY06]). Ces hypothèses résultent de l'expression explicite des accroissements en la variable u et sont satisfaites pour chaque f^m avec le processus γ^m donné pour tout m par : $\gamma^m := \gamma$. La suite d'EDSR donnée par les paramètres $(f^m,\, B)$ satisfait bien un résultat de comparaison.

3 On obtient alors aisément le contrôle uniforme de la suite $(f^m(s, 0, 0))$:

$$\sup_m |f^m(s, 0, 0)|^2 \leq D, \tag{5.4}$$

avec D, qui est contrôlé grâce à (H_1) par la norme dans L^∞ du processus borné $\frac{|\theta|^2}{\alpha}$, et qui appartient donc à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$.

4 La suite de générateurs (f^m) est croissante et converge simplement vers f, c'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $u \in (L^2 \cap L^\infty)(n)$, on a :

$$f^m(s, z, u) \to f(s, z, u), \; \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s, \; \text{lorsque } m \to \infty.$$

La convergence ponctuelle est clairement satisfaite, puisque la suite est construite à l'aide du simple argument de troncature des fonctionnelles en z et en u. La première hypothèse (de croissance) résulte, quant à elle, de la croissance de la suite de fonction de troncature (ρ_m) et de la positivité de la fonctionnelle en la variable z.

Etape 2 : Propriétés utiles de cette approximation

On exploite les propriétés notées 1 et 3 au paragraphe précédent et la bornitude de la condition terminale B : le théorème 0.2 de l'introduction permet d'en déduire l'existence d'une solution (Y^m, Z^m, U^m) à l'EDSR de paramètres (f^m, B) qui appartient à $S^2 \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$. D'autre part, la propriété 2 assure que cette suite d'EDSR satisfait le résultat de comparaison donné par le théorème 0.3 : la suite de générateurs (f^m) étant croissante, il en est de même de (Y_s^m) ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s). Il reste ainsi seulement à justifier que la suite (Y^m) appartient aussi à S^∞ et qu'elle y est bornée (uniformément en m). Au vu de la condition (5.4) et de la bornitude de la condition terminale B, on utilise alors les estimations a priori classiques, qui sont valable dans le cadre d'EDSR à sauts dont le générateur est lipschitzien (on cite comme référence le théorème 8.3.5 de [ROY03] ou la proposition 54.1 de [PAR97b]). Plus précisément, la suite (Y^m) satisfait

$$\exists\, C_m, \quad \forall\, m,\ t,\ \ |Y_t^m|^2 \leq C_m \mathbb{E}\Big(\int_t^T |f^m(s,0,0)|^2 ds + |B|^2 | \mathcal{F}_t \Big), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

De plus, chaque générateur f^m satisfait (H_1) avec les mêmes paramètres que f. Les estimations établies au lemme 5.3 sont donc encore valables pour la solution $(Y^m,\ Z^m,\ U^m)$ (pour tout m). On peut en conclure les deux propriétés énoncées ci-dessous

- La suite (Y^m) possède une borne uniforme dans l'espace S^∞.

- Les suites (Z^m) et (U^m) sont uniformément bornées dans leurs espaces de Hilbert associés (on a même des bornes uniformes respectivement dans BMO(W) et BMO$(\tilde{N}_p)$).

D'autre part et pour les mêmes raisons que celles données dans la preuve du corollaire 5.1 à la section 5.2.1, la solution (Y^m, Z^m, U^m) à l'EDSR de paramètres $(f^m,\ B)$ satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s^m(x)| N_p(\{s\}, dx) = |\Delta Y_s^m|, \ \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } \ s.$$

On obtient la propriété suivante analogue à l'assertion du lemme 5.3

$$|Y^m|_{S^\infty} \leq M \ \text{ et } |U_s^m|_{L^\infty(n)} \leq 2M, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \tag{5.5}$$

Ce dernier contrôle est essentiel, du fait qu'il permet d'établir (pour tout $K > 0$) l'équivalence entre :

$$\mathbb{E} \int_0^T |U_s^m|_K ds \ \text{ et } \mathbb{E} \int_{[0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |U_s^m(x)|^2 n(dx) ds,$$

où la constante C_K dépend de K mais aussi de la borne de la suite réelle $(|U_s^m|_{L^\infty(n)})$: en particulier, cette constante est indépendante de m.

On introduit, pour conclure ce paragraphe, un triplet de processus ($\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$, $\tilde{U}$), tel que chaque composante est limite au sens précisé ci-dessous des suites (Y^m), (Z^m) et (U^m). D'une part, la suite (Y^m) étant croissante, il est possible de définir $\tilde{Y}$ par :

$$\tilde{Y}_s = \lim \nearrow (Y_s^m), \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

D'autre part, puisque les suites (Z^m) et (U^m) sont uniformément bornées dans leurs espaces respectifs (hilbertiens) $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$, on peut en extraire des sous suites faiblement convergentes. On note par $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$ les limites faibles respectives.

Etape 3 : Convergence de l'approximation

Dans cette dernière étape, il s'agit de procéder au passage à la limite dans les EDSR caractérisées par (f^m, B) et données par

$$\begin{aligned} Y_t^m = \ & B + \int_t^T f^m(s, Z_s^m, U_s^m)ds \\ & - \int_t^T Z_s^m dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} U_s^m(x)\tilde{N}_p(ds, dx), \end{aligned} \tag{5.6}$$

afin, tout d'abord, de justifier que le triplet de processus $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ construit lors de la seconde étape est solution de l'EDSR de paramètres (f, B). D'autre part, on montre que ce triplet est limite de la suite dans un sens qui est précisé dans le lemme qui suit (ce résultat est à rapprocher également du lemme 2.3 de la partie en filtration continue).

Lemme 5.4 *On suppose les conditions suivantes sur les paramètres f^m et B construits à l'étape 2 :*
(1) B est une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée,
(2) pour tout s et pour toute suites $(z^m)_m$ et $(u^m)_m$ respectivement convergentes dans $\mathbb{R}^d$ et $L^2(n)$ (respectivement vers z et u) et telles que la suite (u^m) soit uniformément bornée dans $L^\infty(n(dx))$, la suite (f^m) satisfait la propriété de convergence :

$$\lim_{m\to\infty} f^m(s, z^m, u^m) = f(s, z, u), \ \mathbb{P}\text{-}p.s. \text{ et pour tout } s, \ .$$

La suite (Y^m, Z^m, U^m) de solutions aux EDSR caractérisées par (f^m, B) converge vers le triplet $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ au sens suivant :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - \tilde{Y}_t|) + |Z^m - \tilde{Z}|_{L^2(W)} + |U^m - \tilde{U}|_{L^2(\tilde{N}_p)} \to 0.$$

D'autre part, ce triplet $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ est solution de l'EDSR (Eq2.1) de paramètres (f, B).

Preuve du lemme 5.4 et conclusion sur le théorème 5.2

Afin de justifier le point noté (2) dans le lemme 5.4 pour la suite (f^m) construite à l'étape 1, on écrit la décomposition élémentaire suivante :

$$
\begin{aligned}
&|f^m(s, z^m, u^m) - f(s, z, u)| \\
&\leq \underbrace{|(f^m - f)(s, z^m, u^m)|}_{=(I)} + \underbrace{|f(s, z^m, u^m) - f(s, z, u)|}_{=(II)}.
\end{aligned}
$$

Du fait de la continuité du générateur f par rapport aux variables z et u (avec f d'expression connue et donnée par (4.5)) et de l'hypothèse de convergence des suites (z^m) et (u^m), la seconde expression (notée (II)) converge vers zéro. Pour la première expression, le résultat découle du fait que les suites (u^m) et (z^m) sont bornées (car convergentes) et aussi du fait que, pour m assez grand, f et f^m coincident, ce qui entraine que la première expression s'annule.

On se concentre sur le résultat principal du lemme, à savoir l'existence d'une limite aux solutions (Y^m, Z^m, U^m) construites, qui est une solution de l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$. Avant de procéder à la preuve du point difficile et essentiel, à savoir la convergence forte dans leurs espaces de Hilbert respectifs des suites (Z^m) et (U^m) (preuve reléguée à la section 5.2.4 qui suit), on conclut à l'existence d'une solution à l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(f,\ F)$. Afin d'identifier le triplet $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ en tant que solution de l'EDSR (Eq2.1), on doit prouver les assertions suivantes :

(i) $Z^m \to \tilde{Z} \quad (\text{dans } L^2(W)), \text{ lorsque } m \to \infty,$

(ii) $U^m \to \tilde{U} \quad (\text{dans } L^2(\tilde{N}_p(dx, ds))), \text{ lorsque } m \to \infty,$

(iii) $\mathbb{E}\big(\int_0^T |f^m(s, Z_s^m, U_s^m) - f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)| ds\big) \to 0, \text{ lorsque } m \to \infty,$

((i) et (ii) correspondent à la convergence des intégrales stochastiques au sens fort dans les espaces de Hilbert $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p(ds, dx))$).
On rappelle que les processus $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$ sont seulement définis comme les limites faibles des suites (Z^m) et (U^m), le long d'une sous suite appropriée.

Afin de justifier la troisième assertion (iii), on souhaite prouver un résultat de convergence dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$, et pour ce faire, on procède en deux temps en justifiant :

- La convergence en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure, d'une part,
- L'uniforme intégrabilité de la suite de variables $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$, d'autre part.

D'une part, les assertions (i) et (ii) entrainent l'hypothèse plus faible de convergence en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure des suites (Z^m) et (U^m). On exploite, d'autre

part, l'hypothèse de continuité de f et celle de convergence simple de la suite de générateurs (f^m), obtenue à l'étape 1, pour conclure à la convergence en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure de $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$ vers $f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)$.
Afin d'obtenir l'uniforme intégrabilité de la famille $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$, le long de la sous suite où a lieue la convergence forte de (Z^m) et (U^m) vers $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$, on exploite les propriétés suivantes
• chaque générateur f^m satisfait les contrôles (majoration et minoration) donnés par (H_1),
• la suite réelle $(|U_s^m|_\alpha)$ est presque sûrement bornée :
ceci se justifie par le fait que : $x \to U_s(x)$ est bien définie sur $L^2(n)$ et $L^\infty(n)$ (cette suite est bornée par $2|Y|_{S^\infty}$). Du fait que la mesure de Levy n est finie et d'après le résultat d'équivalence (du corollaire 5.1) entre $|\cdot|_\alpha$ et le carré de la norme hibertienne (de $L^2(n)$), on obtient une borne de $(|U_s^m|_\alpha)$ qui est notée $C_{\alpha,|F|_\infty}$. On obtient ainsi les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} f^m(s, Z_s^m, U_s^m) &\leq \tfrac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 + |U_s^m|_\alpha \\ &\leq \tfrac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 + C_{\alpha,|F|_\infty}. \end{aligned}$$

D'autre part, exploitant la relation classique $ab \leq \frac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big)$, on réécrit la minoration de la suite (f^m) donnée par (H_1)

$$\begin{aligned} f^m(s, Z_s^m, U_s^m) &\geq -\theta_s Z_s^m - \tfrac{|\theta_s|^2}{2\alpha} \\ &\geq -\tfrac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 - C_s^1, \end{aligned}$$

avec $C_s^1 := \frac{|\theta_s|^2}{\alpha}$. On en déduit donc le résultat

$$\begin{aligned} |f^m(s, Z_s^m, U_s^m)| &\leq C_s^1 + \alpha|Z_s^m|^2 + C_{\alpha,|F|_\infty}. \\ &\leq C_s^1 + 2\alpha\big(|Z_s^m - \tilde{Z}_s^2|^2 + |\tilde{Z}_s|^2\big) + C_{\alpha,|F|_\infty}. \end{aligned}$$

Comme la convergence forte de $|Z^m - \tilde{Z}|^2$ vers 0 dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ entraine l'uniforme intégrabilité de cette famille, le résultat d'uniforme intégrabilité désiré s'ensuit et assure que l'assertion (iii) est satisfaite. Passant alors à la limite dans les équations données par (5.6), on en conclut que le triplet $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ satisfait donc :

$$\tilde{Y}_t = B + \int_t^T f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \tilde{U}_s(x)\tilde{N}_p(dx, ds). \quad (5.7)$$

Par unicité de la limite $\tilde{Y}$ (au sens $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s), on en déduit l'unicité à indistinguabilité près de $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$ dans les espaces $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$.
On rappelle un résultat classique : si, de toute sous suite de (Z^m) (respectivement de (U^m)), on peut extraire une sous sous suite qui converge vers une limite qui est toujours la même et égale à $\tilde{Z}$ (respectivement à $\tilde{U}$) alors,

la convergence a lieue sans avoir à prendre de sous suites.

Afin de conclure pour la preuve du lemme 5.4, il reste à voir en quel sens se fait la convergence de la suite de processus (Y^m) et, dans ce but, on commence par écrire ci-dessous l'équation satisfaite par $\tilde{Y} - Y^m$:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t - Y_t^m = & \int_t^T \Big(f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s) - f^m(s, Z_s^m, U_s^m) \Big)\, ds \\ & - \int_t^T (\tilde{Z}_s - Z_s^m) dW_s - \int_t^T (\tilde{U}_s - U_s^m)(x) \tilde{N}_p(ds, dx).\end{aligned}$$

Prenant alors le supremum en t, $t \in [0,T]$ puis l'espérance dans l'équation précédente, on peut affirmer :

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{Y}_t - Y_t^m| \right) - \mathbb{E}\big(|\tilde{Y}_0 - Y_0^m|\big) \\ & \leq \ \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s) - f^m(s, Z_s^m, U_s^m)| ds \right) \\ & + \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (\tilde{Z}_s - Z_s^m) dW_s| + \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (\tilde{U}_s - U_s^m)(x) \tilde{N}_p(ds, dx)| \right).\end{aligned}$$

Dès lors, on justifie le résultat à l'aide, d'une part, de la convergence dans l'espace $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ du premier terme du membre de droite (correpondant à l'assertion (iii)) et, d'autre part, à l'aide des inégalités de Doob pour les deux autres termes :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (\tilde{Z}_s - Z_s^m) dW_s| \right) \leq 2\mathbb{E}\left(\int_0^T |\tilde{Z}_s - Z_s^m|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (\tilde{U}_s - U_s^m)(x) \tilde{N}_p(ds, dx)| \right) \\ & \leq \ 2\mathbb{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^*} |(\tilde{U}_s - U_s^m)(x)|^2 n(dx) ds \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

On en conclut : $\mathbb{E}\left(\sup_t |\tilde{Y}_t - Y_t^m| \right) \to 0.$

□

5.2.4 Annexe au théorème d'existence

Afin de justifier la convergence (au sens fort) des suites (Z^m) et (U^m) dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$, on procède comme à la section 2.3 de la première partie. Pour ce faire, on commence par introduire la fonction Φ_K suivante :

$$\Phi_K(x) = \frac{e^{2Kx} - 2Kx - 1}{2K} \quad (= g_{2K}(x)),$$

où Φ_K est une fonction deux fois continûment différentiable et satisfaisant en outre les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_K(0) = 0, \text{ et : } \Phi_K,\ \Phi_K^{''} \geq 0, \\ \Phi_K^{'}(x) \geq 0, \quad \text{dès que : } x \geq 0, \\ \Phi_K^{''} - 2K\Phi_K^{'} = 1. \end{cases}$$

Puisque la suite (Y^m) construite lors des sections précédentes est croissante, on obtient, pour $m \geq p \geq M$, que :

$$\Phi_K^{'}(Y_s^m - Y_s^p) \geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s et pour tout } s.$$

Dans la suite, on notera par commodité $Y^{m,p}$ à la place de $Y^m - Y^p$ (et de façon similaire $Z^{m,p}$, $U^{m,p}$). On écrit la formule d'Itô pour la semimartingale $\Phi_K(Y^{m,p})$ sous forme intégrée entre 0 et T :

$$\mathbb{E}\Phi_K(Y_0^{m,p}) = \mathbb{E}\int_0^T (e^{2KY_s^{m,p}} - 1)(f^m(s, Z_s^m, U_s^m) - f^p(s, Z_s^p, U_s^p))ds$$

$$-\mathbb{E}\int_0^T Ke^{2KY_s^{m,p}}|Z_s^{m,p}|^2 ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{2KY_s^{m,p}} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_{2K}(U_s^{m,p})(x)n(dx)ds.$$

On souhaite donner une borne supérieure à :

$$F^{m,p} = f^m(s, Z_s^m, U_s^m) - f^p(s, Z_s^p, U_s^p).$$

Pour ce faire, on exploite l'hypothèse (H_1) pour écrire, d'une part,

$$\begin{array}{ll} f^m(s, Z_s^m, U_s^m) & \leq \frac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 + |U_s^m|_\alpha \\ & \leq \frac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 + C_{\alpha,M}, \end{array}$$

où la constante $C_{\alpha,M}$ est un majorant de la suite $(|U_s^m|_\alpha)$ qui est bornée (ceci est une conséquence immédiate de l'assertion (i)(b) du lemme 5.3).
D'autre part, on utilise l'inégalité classique : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour écrire : $|\theta_s Z_s| \leq \frac{1}{\alpha}|\theta_s|^2 + \frac{\alpha}{4}|Z_s|^2$ et on en déduit l'existence d'un processus $\hat{C}$, $\hat{C} \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ tel que :

$$-f^p(s, Z_s^p, U_s^p) \leq \hat{C}_s + \frac{\alpha}{4}|Z_s^p|^2.$$

(où $\hat{C}$ est donné par : $\hat{C}_s = \frac{1}{\alpha}|\theta_s|^2 + |\theta_s|)$. On utilise alors la propriété de convexité de $z \to |z|^2$ pour écrire :

$$\begin{aligned}\tfrac{\alpha}{2}|Z_s^m|^2 &\leq \tfrac{\alpha}{2}\left(\tfrac{1}{3}|3Z_s^{m,p}|^2 + \tfrac{1}{3}|3(Z_s^p - \tilde{Z}_s)|^2 + \tfrac{1}{3}|3\tilde{Z}_s|^2\right)\\ &\leq \tfrac{3\alpha}{2}(|Z_s^{m,p}|^2 + |Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2),\end{aligned}$$

et, de façon analogue : $\dfrac{\alpha}{4}|Z_s^p|^2 \leq \dfrac{\alpha}{2}\big(|Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2\big)$.
Une borne supérieure de la différence, notée $F^{m,p}$, est donnée par :

$$\hat{C}_s + 2\alpha\big(|Z_s^{m,p}|^2 + |Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2\big) + C_{\alpha,M}.$$

A partir de maintenant et pour le reste de la preuve, on pose : $K = 4\alpha$ et, prenant en compte les majorations de $F^{m,p}$, on réécrit la formule d'Itô, après avoir transféré dans le membre de gauche les deux termes contenant $|Z^{m,p}|^2$ et $|U^{m,p}|_{8\alpha}$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Phi_K(Y_0^{m,p}) + \mathbb{E}\int_0^T e^{8\alpha Y_s^{m,p}}|U_s^{m,p}|_{8\alpha}ds\\ &+\mathbb{E}\int_0^T 2\alpha e^{8\alpha Y_s^{m,p}}|Z_s^{m,p}|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^T 2\alpha|Z_s^{m,p}|^2 ds\\ &\quad\leq \mathbb{E}\int_0^T (e^{8\alpha Y_s^{m,p}} - 1)(\hat{C}_s + C_{\alpha,M} + 2\alpha(|Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2))ds.\end{aligned}$$

Le passage à la limite (pour p fixé) et lorsque $m \to \infty$ dans le membre de droite est assuré par le théorème de Lebesgue, du fait des deux propriétés suivantes

- $Y_s^{m,p} \to \tilde{Y}_s - Y_s^p$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s,
- les processus $\hat{C}$, $|Z^p - \tilde{Z}|^2$ et $|\tilde{Z}|^2$ appartiennent à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$.

D'autre part, comme toutes les variables de la suite (U_s^m) sont à valeurs uniformément bornées dans $L^\infty(n)$, on exploite le résultat d'équivalence entre les variables des suites $(|U_s^{m,p}|_{8\alpha})$ et $(|U_s^{m,p}|_{L^2}^2)$ suivants

$$\exists\, C,\quad \frac{1}{C}|U_s^{m,p}|_{L^2}^2 \leq |U_s^{m,p}|_{8\alpha} \leq C|U_s^{m,p}|_{L^2}^2.$$

On passe désormais à la limite inférieure en m dans la formule d'Itô, l'entier p étant fixé :

$$\mathbb{E}\Phi_K(\tilde{Y}_0 - Y_0^p) + \frac{1}{C}\liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T |U_s^{m,p}|_{L^2}^2 ds$$

$$+\liminf_{m\to\infty}\left(\mathbb{E}\int_0^T 2\alpha e^{8\alpha Y_s^{m,p}}|Z_s^{m,p}|^2ds+\mathbb{E}\int_0^T 2\alpha|Z_s^{m,p}|^2ds\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\int_0^T (e^{8\alpha(\tilde{Y}_s-Y_s^p)}-1)(\hat{C}_s+C_{\alpha,M}+2\alpha(|Z_s^p-\tilde{Z}_s|^2+|\tilde{Z}_s|^2))ds.$$

Désormais et du fait de l'hypothèse de convergence faible de la suite (Z^m) vers $\tilde{Z}$ dans $L^2(W)$ (resp. de U^m vers $\tilde{U}$ dans $L^2(\tilde{N}_p)$), on obtient (pour p fixé) :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(2\alpha(e^{8\alpha(\tilde{Y}_s-Y_s^p)}+1)\right)|\tilde{Z}_s-Z_s^p|^2ds$$
$$\leq \liminf_m \mathbb{E}\int_0^T 2\alpha\left(e^{8\alpha Y_s^{m,p}}+1\right)|Z_s^{m,p}|^2ds,$$

ainsi que

$$\mathbb{E}\int_0^T |\tilde{U}_s-U_s^p|_{L^2}^2ds \leq \liminf_m \mathbb{E}\int_0^T |U_s^{m,p}|_{L^2}^2ds,$$

Il reste alors à procéder au second passage à la limite (lorsque p tend vers ∞). D'une part et puisque les processus $\hat{C}$ et $\tilde{Z}$ appartiennent tous deux à $L^1(ds\otimes d\mathbb{P})$ et que $\tilde{Y}_s-Y_s^p$ converge ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s) en décroissant vers 0, il résulte d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T (e^{8\alpha(\tilde{Y}_s-Y_s^p)}-1)(\hat{C}_s+C_{\alpha,M}+2\alpha|\tilde{Z}_s|^2)ds=0.$$

D'autre part et comme précédemment, on peut transférer dans le membre de gauche le terme contenant la quantité $|\tilde{Z}-Z^p|^2$, afin d'obtenir l'inégalité qui suit :

$$\mathbb{E}\int_0^T 4\alpha|\tilde{Z}_s-Z_s^p|^2ds+\frac{1}{C}\mathbb{E}\int_0^T |\tilde{U}_s-U_s^p|_{L^2}^2ds$$
$$\leq \mathbb{E}\int_0^T (e^{8\alpha(\tilde{Y}_s-Y_s^p)}-1)(\hat{C}_s+C_{\alpha,M}+2\alpha|\tilde{Z}_s|^2)ds.$$

On en déduit la convergence forte des suites (Z^m) vers $\tilde{Z}$ dans $L^2(W)$ (resp. de (U^m) vers $\tilde{U}$ dans $L^2(\tilde{N}_p)$).

□

5.3 Nouvelle étude théorique lorsque : $n(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = +\infty$

5.3.1 Approche du problème

L'objectif de cette section consiste à établir un résultat d'existence pour l'EDSR (Eq2.1) de paramètres (f, B) sous une hypothèse moins restrictive sur la mesure de Lévy n, à savoir

$$n(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^*}(1\wedge|x|)^2)n(dx) < \infty.$$

On conserve les notations de la section 4.2.3 et on rappelle l'expression du générateur f

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}}\left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z+\frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u-\pi\beta_s|_\alpha\right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha}.$$

Dans cette expression, $\mathcal{C}$ représente l'ensemble de contraintes supposé compact dans toute cette section. On revient alors sur le modèle introduit dans la section 4.2.3 dans le cadre d'un espace de Wiener-Poisson munie de la filtration naturelle $\mathcal{F}$ (continue à droite et complète) et introduite en section 4.2.1. Le processus de prix S de l'actif risqué satisfait l'EDSR unidimensionnelle et avec sauts :

$$dS_s = S_{s-}\left(b_s ds + \sigma_s dW_s + \int_{\mathbb{R}^*}\beta_s(x)\tilde{N}_p(ds,dx)\right),$$

avec les processus b, σ, β et $\theta := \sigma^{-1}b$ prévisibles et bornés et β satisfaisant en outre

$$\beta_s > -1 \text{ et } |\beta_s(x)| \leq C(1\wedge|x|), \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \tag{5.8}$$

La minoration assure que l'intégrale stochastique $\beta\cdot\tilde{N}_p$ est à sauts strictement supérieurs à -1 et le processus de prix S donné par la formule de Doléans-Dade est un processus positif. La majoration quant à elle assure que le processus β appartient à $L^2(\tilde{N}_p)$.
Avant de réénoncer le résultat établi par le corollaire 5.1, on rappelle l'expression de la fonctionnelle $|\cdot|_\alpha$:

$$|u|_\alpha = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(\frac{e^{\alpha u(x)} - 1 - \alpha u(x)}{\alpha})n(dx),$$

où cette dernière expression a un sens dès que $u \in L^2 \cap L^\infty(n)$. Le résultat du corollaire 5.1 donne, de plus, l'équivalence entre $|\cdot|_\alpha$ et le carré de la norme hilbertienne dans $L^2(n)$ noté $|\cdot|^2_{L^2(n)}$

$$\forall u \in L^2 \cap L^\infty(n), \quad |u|_{L^\infty(n)} \leq M$$

$$\frac{1}{C_{\alpha,M}}|u|^2_{L^2} \leq |u|_\alpha \leq C_{\alpha,M}|u|^2_{L^2}. \tag{5.9}$$

Cette relation sera exploitée à plusieurs reprises dans la suite. On note que, pour toute fonction u ($u \in (L^2 \cap L^\infty)(n)$), la constante dépend des paramètres α et M (M étant un majorant quelconque de $|u|_{L^\infty(n)}$). Cette équivalence permet notamment de justifier que le générateur $f := f(s,z,u)$ est bien défini ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s) pour tout couple (z,u) appartenant à $\mathbb{R} \times (L^2 \cap L^\infty)(n)$.
On termine ces rappels préliminaires en précisant que toute stratégie π considérée est un processus unidimensionnel et prévisible (à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{C}$) et que le processus (unidimensionnel) de richesse X^π (associé à π) est de carré intégrable. Un tel processus π est dit admissible s'il satisfait les conditions de la définition 0.3 énoncée dans la section 0.3.2.

Théorème 5.3 *Sous les hypothèses précédentes sur l'EDSR (Eq2.1) et de paramètres $(f,\ B)$ et dont le générateur f a pour expression (4.5), l'EDSR possède une et une seule solution appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$.*

Quelques propriétés et remarques préliminaires

Avant d'aborder la preuve du résultat d'existence donné par le théorème 5.3, on donne ici quelques propriétés qui ont été établies dans le cas où $n(\mathbb{R} \setminus \{0\}) < \infty$ et qui restent vraies.
Le générateur f vérifie toujours les hypothèses (H_1) et (H_2) du lemme 5.1. On précise que le processus γ apparaissant dans (H_2) et issu de la linéarisation des accroissements du générateur $f := f(s,z,u)$ par rapport à la variable u vérifie

$$\forall\, u, u' \in L^2 \cap L^\infty(n), \quad \gamma(u,u') \in L^2(n).$$

Toute solution à l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$ satisfait donc les estimations a priori du lemme 5.3, excepté la seconde relation donnée par (i)(b). En effet, dans le cas où $n(\mathbb{R}^*) = \infty$, il n'y a plus de relation d'inclusion entre $L^\infty(n)$ et $L^2(n)$. D'autre part, on justifie ci-dessous une autre propriété du processus γ (associé à (H_2)) qui permet d'assurer que la procédure employée à la section 5.2.2 afin d'obtenir l'unicité se réécrit à l'identique. Ainsi, pour toute solution (Y,Z,U) de l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$, on a toujours : $|U_s|_{L^\infty(n)} \leq 2|Y|_{S^\infty}$. On considère alors deux solutions de cette même EDSR, notées (Y^i, Z^i, U^i) (pour $i = 1, 2$) et on désigne par M un majorant de Y^i dans S^∞ (ce majorant est donné par les estimations du lemme 5.3). On peut dès lors affirmer :

$$\exists\ \delta_{2M} > 0,\ \bar{C}_{2M} > 0,\ \text{t.q.}\ -1 + \delta_{2M} \leq \gamma_s(U_s^1, U_s^2) \leq \bar{C}_{2M},$$

et il en résulte que la preuve de l'unicité est analogue à celle de la section 5.2.2.

On explique dans le paragraphe qui suit, les différentes étapes qui sont nécessaires pour établir la preuve du théorème 5.3. La difficulté du cas où n est de masse infinie consiste à réétablir un résultat de stabilité et, en particulier, la convergence forte de bonnes suites. Anticipant ici sur la suite, cette difficulté est reliée au fait que le contrôle supérieur du générateur fait apparaitre la fonctionnelle convexe non linéaire $|\cdot|_\alpha$.

Démarche de la preuve de l'existence

Afin d'établir la preuve du théorème 5.3, nous procédons en trois grandes étapes, dont on donne les grandes lignes ci-dessous :
• Dans une première étape, on introduit un nouveau générateur $\tilde{f}$ construit explicitement en fonction de f en posant

$$\tilde{f}(s, z, u) := f(s, z - \frac{\theta_s}{\alpha}, u) - f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0). \tag{5.10}$$

On justifie l'existence de solutions pour l'EDSR (Eq2.1) de paramètres ($\tilde{f}$, $\frac{\tilde{B}}{N}$) en établissant un nouveau résultat de stabilité pour la suite d'EDSR de paramètres ($f^{1,m}$, $\frac{\tilde{B}}{N}$), où la suite des générateurs $(f^{1,m})_m$ est construite croissante et convergente (vers $\tilde{f}$) et, dans cette étape, on explicite la valeur du paramètre N.
• Dans une deuxième étape, on introduit à l'aide d'une procédure de découpage une nouvelle suite d'EDSR dont les paramètres sont ($f^{(i)}$, $\xi^i := \frac{\tilde{B}}{N^i}$) et où la suite $(f^{(i)})_i$ est construite à l'étape 1 de la section 5.3.5 pour chaque i et de manière itérative. Pour chaque EDSR de paramètres ($f^{(i)}$, ξ^i), on construit une solution (sous une bonne contrainte sur N^i à chaque étape i). L'objectif consiste à construire cette suite $(f^{(i)})$ telle que, $\sum_{i=1}^{k} f^{(i)} = \tilde{f}$, pour tout k, de sorte que la somme des solutions aux k EDSR fournisse une solution à l'EDSR de paramètres ($\tilde{f}$, $\sum_{i=1}^{k} \xi^i$) et que de plus il existe un entier k satisfaisant : $\sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{B}}{N^i} = \tilde{B}$.

• Dans une dernière étape, on conclut à l'existence d'une solution pour l'EDSR (Eq2.1) de paramètres (f, B) (où B est défini à l'aide de $\tilde{B}$ et des paramètres de l'EDSR) : cette solution est construite à partir de celle obtenue à l'étape précédente pour l'EDSR de paramètres ($\tilde{f}$, $\tilde{B}$) et la conclusion s'ensuit.

5.3.2 Introduction d'une première approximation

L'objectif de cette étape est de construire une solution à l'EDSR de paramètres ($\tilde{f}$, $\frac{\tilde{B}}{N}$) où $\tilde{f}$ a pour expression (5.10) et N est un entier à déterminer.
On définit, tout d'abord, la suite de générateurs $(f^m)_m$ par :

$$\begin{aligned} f^m(s,z,u) = \; & \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \left(|\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta_s}{\alpha})|^2 \rho_m(z) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_\alpha(u - \pi\beta_s) n^m(dx) \right) \\ & -z\theta_s - \tfrac{|\theta_s|^2}{2\alpha}, \end{aligned}$$

où (ρ_m) est une suite régulière de fonctions de troncature (la définition a été donnée dans la section 4.4.3 dans le cas $n(\mathbb{R} \setminus \{0\}) < \infty$) et la mesure finie n^m est définie par : $n^m(dx) := \mathbf{1}_{|x| \geq \frac{1}{m}} n(dx)$, puis on introduit la suite $(f^{1,m})$:

$$f^{1,m}(s,z,u) = f^m(s, z - \frac{\theta_s}{\alpha}, u) - f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0).$$

Du fait que la stratégie $\pi \equiv 0$ est admissible (et $0 \in \mathcal{C}$), l'infimum apparaissant dans l'expression de $f^m(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0)$ est nul et il s'ensuit

$$f^m(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0) = f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0) = \frac{|\theta_s|^2}{\alpha}.$$

Dès lors, on obtient : $f^{1,m}(s,0,0) = 0$, pour tout m, et la suite $(f^{1,m})$ satisfait les propriétés suivantes :
• La suite $(f^{1,m})$ est croissante et converge vers $\tilde{f}$ défini par l'équation (5.10) . Puisque tous les générateurs $f^{1,m}$ sont lipschitziens et par un raisonnement analogue à celui de la section 5.2.3, on obtient l'existence d'une solution ($Y^{1,m}$, $Z^{1,m}$, $U^{1,m}$) à l'EDSR de paramètres ($f^{1,m}$, $\frac{\tilde{B}}{N}$) (N quelquonque). On utilise alors la croissance de $(f^{1,m})$ ainsi que le résultat de comparaison donnée par le théorème 0.3 afin d'obtenir la croissance (presque sûre et pour tout s) de la suite $(Y_s^{1,m})$.
• Du fait que : $f^{1,m}(s,0,0) = 0$, on déduit, par une procédure classique de linéarisation rappelée ci dessous, l'estimation suivante du processus $Y^{1,m}$:

$$|Y_s^{1,m}| \leq \frac{|\tilde{B}|_\infty}{N}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \tag{5.11}$$

On justifie ce résultat en exploitant l'hypothèse (H_2) satisfaite par chaque générateur $f^{1,m}$ (les paramètres associés à (H_2) sont les mêmes que ceux pour f, générateur dont les accroissements sont identiques à ceux de $\tilde{f}$). Ceci donne pour tout m

$$f^{1,m}(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m}) - f^{1,m}(s,0,0) \leq \lambda_s(Z_s^{1,m}) + \langle \gamma_s, U_s^{1,m} \rangle.$$

D'autre part, cette hypothèse fournit un contrôle précis des processus λ et γ qui sont précisés par la procédure de linéarisation dans la section 5.2.2 : à savoir que, posant $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := \mathcal{E}_T(\lambda \cdot W + \gamma \cdot \tilde{N}_p)$ on obtient une mesure de probabilité. Si on note alors W^λ et $\tilde{N}^\gamma$ les processus obtenus par une transformation de Girsanov et définis par

$$W^\lambda := W - \langle \lambda \cdot W, W \rangle \text{ et } \tilde{N}^\gamma(ds,dx) := \tilde{N}_p(ds,dx) - \gamma_s n(dx) ds,$$

ces derniers sont des martingales locales sous $\mathbb{Q}$. Il existe donc une suite (τ^n) $(\tau^n \to T)$ telle que $(Z \cdot W)_{.\wedge\tau^n}$ et $(U \cdot \tilde{N})^\gamma_{.\wedge\tau^n}$ sont des $\mathcal{F}$-martingales sous $\mathbb{Q}$. Supposant, sans restriction, que : $t \leq \tau^n \leq t$, on écrit l'EDSR satisfaite par $Y^{1,m}$ sous forme intégrée entre $t = t \wedge \tau^n$ et $T \wedge \tau^n$:

$$Y_t^{1,m} \leq Y_{T\wedge\tau^n}^{1,m} - \int_t^{T\wedge\tau^n} Z_s^{1,m} dW_s^\lambda - \int_t^{T\wedge\tau^n} \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s^{1,m}(x) \tilde{N}^\gamma(ds,dx).$$

On prend alors l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{Q}$ et on justifie ensuite le passage à la limite (en n) à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir : $Y_t^{1,m} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\frac{\tilde{B}}{N}|\mathcal{F}_t)$ et donc la majoration souhaitée (exploitant l'équivalence entre les mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$).

• La suite satisfait encore l'hypothèse (H_1) de sorte que les estimations du lemme 5.3 sont encore valables (uniformément en m).

En conséquence de ces propriétés et de façon analogue à la preuve fournie dans la section 5.2.3, on obtient :

- l'existence du processus $\tilde{Y}$ défini par : $\tilde{Y}_s = \lim \nearrow Y_s^{1,m}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s,

- l'existence de processus $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$, qui sont limites (au sens faible) des suites $(Z^{1,m})$ et $(U^{1,m})$ dans $L^2(W)$ et dans $L^2(\tilde{N}_p)$.

L'objectif du paragraphe qui suit est d'établir un résultat de stabilité pour la suite d'EDSR caractérisée par les paramètres $(f^{1,m}, \frac{\tilde{B}}{N})$, en explicitant N (i.e. la contrainte sur la condition terminale), puis d'en déduire en justifiant le passage à la limite (en m), une solution de l'EDSR de paramètres $(\tilde{f}, \frac{\tilde{B}}{N})$.

5.3.3 Preuve du raisonnement de stabilité

Dans cette section, on souhaite montrer un résultat analogue à celui de la section 5.2.4, en justifiant la convergence au sens fort des suites $(Z^{1,m})$ et

$(U^{1,m})$ dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$.

$(Y^{1,m},\ Z^{1,m},\ U^{1,m})$ désigne la solution construite précédemment à l'EDSR de paramètres $(f^{1,m},\ \frac{\tilde{B}}{N})$, où N est un entier (arbitraire pour l'instant) et $\tilde{B}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée (on note $M_{\tilde{B}}$ un réel tel que $|\tilde{B}|_\infty \leq M_{\tilde{B}}$). On considère alors deux entiers m, p avec $m \geq p$ et, par souci de clarté, on pose : $Y^{1,(m,p)} := Y^{1,m} - Y^{1,p}$, et $Z^{1,(m,p)} := Z^{1,m} - Z^{1,p}$, $U^{1,(m,p)} := U^{1,m} - U^{1,p}$. D'après l'étude du paragraphe précédent, la suite $(Y^{1,m})$ est croissante et le processus $Y^{1,(m,p)}$ est positif et borné par $2M_{\tilde{B}}$, pour tout $m \geq p$. On applique tout d'abord la formule d'Itô à la semimartingale positive $\phi(Y^{1,(m,p)})$ (avec $\phi : x \to |x|^2$)

$$\mathbb{E}(\phi(Y_0^{1,(m,p)})) - \mathbb{E}(\phi(Y_T^{1,(m,p)})) =$$

$$+ \mathbb{E}\left(\int_0^T 2Y_s^{1,(m,p)}\big(f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m}) - f^{1,p}(s, Z_s^{1,p}, U_s^{1,p})\big)ds\right)$$

$$- \mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_s^{1,\,(m,p)}|^2 ds\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^*} |U_s^{1,(m,p)}(x)|^2 n(dx)ds\right). \qquad (*)$$

On cherche alors une majoration de la différence suivante :

$$\begin{aligned} F^{m,\,p} &= f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m}) - f^{1,p}(s, Z_s^{1,p}, U_s^{1,p}) \\ &= f^m(s, Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m}) - f^p(s, Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,p}), \end{aligned}$$

afin de contrôler supérieurement le premier terme du membre de droite dans la formule (*). Puisque f^m et f^p satisfont l'hypothèse (H_1), il en résulte, d'une part :

$$f^m(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m}) \leq \frac{\alpha}{2}|Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2 + |U_s^{1,m}|_\alpha,$$

et, d'autre part, exploitant la minoration donnée par (H_1) et l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on déduit :

$$\exists\ \hat{C} \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P}),\ -f^p(s, Z_s^{1,p} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,p}) \leq \hat{C}_s + \frac{\alpha}{4}|Z_s^{1,p} - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2.$$

avec le processus $\hat{C} := \frac{|\theta|^2}{\alpha}$. On utilise à nouveau la convexité des fonctionnelles $z \to |z|^2$ et $|\cdot|_\alpha$:

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha}{2}|Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2 &\leq \tfrac{\alpha}{2}(|\tfrac{1}{3}(3Z_s^{1,(m,p)} + 3(Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s) + 3(\tilde{Z}_s - \tfrac{\theta_s}{\alpha})|^2) \\ &\leq \tfrac{3\alpha}{2}(|Z_s^{1,(m,p)}|^2 + |Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2), \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\alpha}{4}|Z_s^{1,p} - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2 \leq \frac{\alpha}{2}\big(|Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2\big),$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} |U_s^{1,m}|_\alpha = {} & \tilde{C}|(\tfrac{3U_s^{1,(m,p)}}{3} + \tfrac{3(U_s^{1,p} - \tilde{U}_s)}{3} + \tfrac{3\tilde{U}_s}{3})|^2_{L^2(n)}, \\ \leq {} & 3\tilde{C}\big(|U_s^{1,(m,p)}|^2_{L^2(n)} + |U_s^{1,p} - \tilde{U}_s|^2_{L^2(n)} + |\tilde{U}_s|^2_{L^2(n)}\big), \end{aligned}$$

la première inégalité est obtenue à l'aide de la relation : $|u|_{3\alpha} = \frac{1}{3}|3u|_\alpha$, et la dernière inégalité est une conséquence de la relation (5.9). On justifie ci-dessous la notation $\tilde{C}$, constante associée à (5.9) et introduite au début de cette section 5.3. On rappelle que, pour toute solution $(Y^{1,m}, Z^{1,m}, U^{1,m})$, la variable aléatoire $U_s^{1,m}$ est contrôlée dans $L^\infty(n)$ par $2|\tilde{B}|_\infty := 2M_{\tilde{B}}$ et il s'ensuit donc :

$$\forall\, m, p,\ m \geq p, \quad |U_s^{1,(m,p)}|_{L^\infty(n)} \leq 4M_{\tilde{B}},\ \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

Quitte à modifier la constante par la suite, on conserve la notation $\tilde{C}$ (au lieu de $3\tilde{C}$).
On obtient ainsi un contrôle de la différence $F^{m,\,p}$:

$$\begin{aligned} F^{m,\,p} & \leq \hat{C}_s + \tfrac{\alpha}{4}|Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2 + \tfrac{\alpha}{2}|Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2 + |U_s^{1,m}|_\alpha \\ & \leq \hat{C}_s + 2\alpha(|Z_s^{1,(m,p)}|^2 + |Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2) \\ & \quad + \tilde{C}\big(|U_s^{1,(m,p)}|^2_{L^2(n)} + |U_s^{1,p} - \tilde{U}_s|^2_{L^2(n)} + |\tilde{U}_s|^2_{L^2(n)}\big). \end{aligned}$$

On réécrit la formule d'Itô donnée par (*) (en haut de la page précédente) en transférant dans le membre de gauche les termes contenant soit $|Z^{1,(m,p)}|^2$ soit $|U^{1,(m,p)}|^2_{L^2}$), il en résulte :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\phi(Y_0^{1,(m,p)})) + \mathbb{E}\int_0^T \big(1 - 4\alpha Y_s^{1,(m,p)}\big)|Z_s^{1,(m,p)}|^2 ds \\ & + \mathbb{E}\int_0^T \big(1 - 2\tilde{C}Y_s^{1,(m,p)}\big)|U_s^{1,(m,p)}|^2_{L^2(n)} ds \\ & \leq \mathbb{E}\left(\int_0^T 2Y_s^{1,(m,p)}\hat{C}_s + 4\alpha Y_s^{1,(m,p)}\big(|Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2\big) ds\right) \\ & \quad + \mathbb{E}\left(\int_0^T 2\tilde{C}Y_s^{1,(m,p)}\big(|U_s^{1,p} - \tilde{U}_s|^2_{L^2(n)} + |\tilde{U}_s|^2_{L^2(n)}\big) ds\right). \end{aligned}$$

Afin de justifier le passage à la limite inférieure, lorsque m tend vers $+\infty$, (p étant fixé) pour chacun des termes du membre du droite, on emploie le théorème de Lebesgue en utilisant les résultats suivants :

- $Y_s^{1,(m,p)} \to \big(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p}\big)$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, lorsque m tend vers $+\infty$ (p fixé),
- les processus $|Z^{1,p}|^2$, $|U^{1,p}|^2_{L^2(n)}$, $|\tilde{Z} - \frac{\theta}{\alpha}|^2$ et $|\tilde{U}|^2_{L^2(n)}$ appartiennent tous à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$.

On s'intéresse alors au passage à la limite inférieure en m dans le membre de gauche (p fixé), en exploitant l'estimation a priori ci-dessous :

$$\forall\, m \geq p, \quad 0 \leq Y_s^{1,(m,p)} \leq 2\frac{M_{\tilde{B}}}{N}, \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s,$$

et on donne alors une condition suffisante pour assurer la positivité (presque sûre et pour tout s) des termes suivants

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} \big(1 - 4\alpha Y_s^{1,(m,p)}\big). \\ \\ \big(1 - 2\tilde{C} Y_s^{1,(m,p)}\big). \end{array} \right.$$

On impose donc les conditions suivantes :

$$(1 - 16\alpha\frac{M_{\tilde{B}}}{N}) \geq \frac{1}{2} \text{ et } (1 - 8\tilde{C}\frac{M_{\tilde{B}}}{N}) \geq \frac{1}{2}.$$

soit autrement dit :

$$\frac{M_{\tilde{B}}}{N} = \inf\{\frac{1}{32\alpha}, \frac{1}{16\tilde{C}}\}. \tag{5.12}$$

Cette condition est satisfaite pour toute valeur de α et quelle que soit la variable $\tilde{B}$ $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée, à condition de prendre N assez grand. Ces contraintes données par (5.12), qui assurent la positivité des derniers termes du membre de gauche, permettent de justifier les passages à la limite inférieure en m suivants (tout au moins le long d'une sous suite où les suite de processus $(Z^{1,m})$ et $(U^{1,m})$ convergent faiblement) :

$$\begin{aligned} & \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T (1 - 4\alpha Y_s^{1,(m,p)})|Z_s^{1,(m,p)}|^2 ds \\ \geq\ & \mathbb{E}\left(\int_0^T (1 - 4\alpha(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p}))|\tilde{Z}_s - Z_s^{1,p}|^2 ds\right), \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \big(1 - 4\tilde{C}Y_s^{1,(m,p)}\big)|U_s^{1,(m,p)}|^2_{L^2(n)}ds$$
$$\geq \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(1 - 4\tilde{C}(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\big)|\tilde{U}_s - U_s^{1,p}|^2_{L^2(n)}ds\right).$$

Muni de ces inégalités, le passage à la limite inférieure en m est justifié et il donne :

$$\mathbb{E}\big(\phi(\tilde{Y}_0 - Y_0^{1,p}\big) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(1 - 4\alpha(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\big)|\tilde{Z}_s - Z_s^{1,p}|^2 ds\right)$$
$$+ \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(1 - 2\tilde{C}(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\big)|\tilde{U}_s - U_s^{1,p}|^2_{L^2(n)}ds\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T 2(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\hat{C}_s + 4\alpha(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\big(|Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2\big)ds\right)$$
$$+ \mathbb{E}\left(\int_0^T 2(\tilde{Y}_s - Y_s^{1,p})\tilde{C}\big(|U_s^{1,p} - \tilde{U}_s|^2_{L^2(n)} + |\tilde{U}_s|^2_{L^2(n)}\big)ds\right).$$

Désormais, afin de procéder au passage à la limite en p, on transfère dans le membre de gauche les termes $|Z_s^{1,p} - \tilde{Z}_s|^2$ et $|U_s^{1,p} - \tilde{U}_s|^2_{L^2}$. La condition (5.12) permet ainsi de justifier ce second passage à la limite (en p) dans le membre de gauche. En outre, l'appartenance des processus $\hat{C}$, $|\tilde{Z} - \frac{\theta}{\alpha}|^2$ et $|\tilde{U}|^2$ à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$, d'une part, et la convergence presque sûre et pour tout s de $Y_s^{1,p}$ vers $\tilde{Y}_s$, d'autre part, assurent que le membre de droite tend vers 0 (d'après le théorème de Lebesgue). On en conclut alors

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\int_0^T |\tilde{Z}_s - Z_s^{1,p}|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^T |\tilde{U}_s - U_s^{1,p}|^2_{L^2(n)}ds\right) = 0,$$

ce qui achève la preuve du résultat de stabilité.

□

5.3.4 Conclusion à la preuve de l'existence

Afin de donner la conclusion pour l'existence d'une solution à l'EDSR de paramètres $(\tilde{f}, \frac{\tilde{B}}{N})$ et sous la contrainte de taille donnée par (5.12), on procède, comme dans le cas où la mesure de Lévy est de masse finie, à un passage à la limite dans les EDSR de paramètres respectifs $(f^{1,m}, \frac{\tilde{B}}{N})$. Pour

ce faire, on rappelle ci-dessous les assertions à démontrer :
(i) $Z^{1,m} \to \tilde{Z}$ dans $L^2(W)$ lorsque $m \to \infty$,
(ii)$U^{1,m} \to \tilde{U}$, dans $L^2(\tilde{N}_p(dx, ds))$ lorsque $m \to \infty$,
(iii) $\mathbb{E}\big(\int_0^T |f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m}) - \tilde{f}(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)|ds\big) \to 0$, lorsque $m \to \infty$.

La preuve du paragraphe précédent assure que les assertions (i) et (ii) sont satisfaites (tout au moins et dans un premier temps la convergence a lieue le long d'une sous suite appropriée, où la convergence faible a été initialement établie).

Afin de prouver la convergence dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ (dans (iii)), on procède en démontrant :

– la convergence de $f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m})$ vers $\tilde{f}(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)$, en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure,

– la domination uniformément intégrable et pour tout m de la quantité $f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m})$.

Pour la seconde assertion, cela résulte du contrôle suivant du générateur f^m

$$|f^m(s, Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m})|$$
$$\leq \max\left\{ (\frac{\alpha}{2}|Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2 + |U_s^{1,m}|_\alpha); \quad \big| - \theta_s(Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}) - \frac{|\theta_s|^2}{\alpha}\big| \right\},$$

et du fait que les suites $(|Z^{1,m} - \frac{\theta}{\alpha}|^2)$ et $(|U^{1,m}|_\alpha)$ sont uniformément intégrables, puisque toutes deux convergentes dans l'espace $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ et du fait de l'hypothèse de bornitude de θ.
Afin de justifier le premier point, on établit un résultat de convergence pour la suite $(f^{1,m})_m$, résultat qui est énoncé ci-dessous.

Lemme 5.5 *Pour tout s et pour toutes suites convergentes $(z^m)_m$ et $(u^m)_m$ respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n(dx))$, et telles que la suite (u^m) soit uniformément bornée dans $L^\infty(n)$ et satisfait de plus la condition :*

$$\exists\, C > 0, \quad \sup_m |u^m|_{L^2(n)} \leq C,$$

on a :

$$f^{1,m}(s, z^m, u^m) \to \tilde{f}(s, z, u), \ \mathbb{P}\text{-}p.s.\ et\ pour\ tout\ s,\ lorsque\ m \to \infty.$$

Le résultat de ce lemme découle directement de la convergence des suites (z^m) et (u^m) (respectivement vers z et u) et de la convergence simple de $f^{1,m}$ vers $\tilde{f}$.
Quitte alors à ne considérer que des sous suites, on peut affirmer que $(Z_s^{1,m})$

et $(U_s^{1,m})$ convergent en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure respectivement dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n)$, et on en conclut dès lors à la convergence dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ de la suite $(f^{1,m}(s, Z_s^{1,m}, U_s^{1,m}))$ vers $\tilde{f}(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)$.

Le passage à la limite dans les EDSR de paramètres $(f^{1,m}, \frac{\tilde{B}}{N})$ est justifié et la preuve du lemme 5.4 se réécrit à l'identique. En particulier, toutes les convergences ((i), (ii) et (iii)) ont lieu, sans avoir à considérer de sous suites. Toutes les conditions de la preuve de l'existence établie dans le cas où n est de masse finie (dans la section 5.2.3) sont satisfaites : en particulier, on conclut à l'unicité des limites faibles $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$ (qui sont limites au sens fort, d'après le résultat de stabilité) et on obtient que le triplet $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ est solution de l'EDSR (de paramètres $(\tilde{f}, \frac{\tilde{B}}{N})$) obtenue par passage à la limite. D'autre part, la première composante de ce triplet satisfait en outre :

$$\mathbb{E}\left(\sup_t |\tilde{Y}_t - Y_t^{1,m}|\right) \to 0.$$

$\square$

5.3.5 Mise en oeuvre de la procédure de découpage

Etape 1 : Construction récursive

On explique ici en détail la construction permettant de démontrer un résultat d'existence pour toute EDSR de paramètres $(\tilde{f}, \tilde{B})$. Le générateur $\tilde{f}$ est toujours défini par :

$$\tilde{f}(s, z, u) := f(s, z - \frac{\theta_s}{\alpha}, u) - f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0),$$

et ce dernier satisfait les conditions (H_1) ainsi que : $\tilde{f}(s, 0, 0) = 0$. Ceci permet notamment d'obtenir, pour tout processus solution de l'EDSR, l'estimation essentielle (qui ne dépend que de la condition terminale $\tilde{B}$) donnée par (5.11) dans la section 5.3.2.

On procède par découpage en justifiant la résolution d'une famille d'EDSR de paramètres $(f^{(i)}, \xi^i := \frac{\tilde{B}}{N^{(i)}})$ dont la suite de générateurs $(f^{(i)})$ est construite de manière récursive de la façon suivante :

1. On initialise en posant : $f^{(1)} := \tilde{f}$ et $(\tilde{Y}^1, \tilde{Z}^1, \tilde{U}^1)$ représente une solution de l'EDSR de paramètres $(f^{(1)}, \xi^1 := \frac{\tilde{B}}{N})$: on note que l'existence de cette solution a été justifiée à l'aide du résultat de stabilité de la section précédente (avec la contrainte (5.12) sur N).

2. Supposant alors connue une solution $(\tilde{Y}^i,\ \tilde{Z}^i,\ \tilde{U}^i)$ à toutes les EDSR de paramètres $(f^{(i)},\ \frac{\tilde{B}}{N^i})$ jusqu'à l'ordre k $(k \geq 1)$ on définit le générateur $f^{(k+1)}$ comme suit

$$f^{(k+1)}(s,z,u) = \tilde{f}(s, z + \bar{Z}^k_s - \frac{\theta_s}{\alpha}, u + \bar{U}^k_s) - \tilde{f}(s, \bar{Z}^k_s - \frac{\theta_s}{\alpha}, \bar{U}^k_s),$$

où $\bar{Z}^k = \sum_{i \leq k} \tilde{Z}^i$ et $\bar{U}^k = \sum_{i \leq k} \tilde{U}^i$.

L'objectif de cette procédure est de montrer que, s'il existe un triplet $(\tilde{Y}^i,\ \tilde{Z}^i,\ \tilde{U}^i)$ qui est solution de l'EDSR de paramètres $(f^{(i)},\ \frac{\tilde{B}}{N^{(i)}})$ jusqu' à l'étape k, la somme $\bar{Y}^k := \sum_{i=1}^{k} \tilde{Y}^i$ est une solution de l'EDSR de paramètres $(\tilde{f},\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{B}}{N^{(i)}})$.
Pour ce faire, on doit justifier, d'une part et pour chaque étape de la procédure, l'existence d'un entier $N^{(i)}$ tel que l'EDSR de paramètres $(f^{(i)},\ \frac{\tilde{B}}{N^{(i)}})$ possède une solution. D'autre part et pour répondre au problème posé, il faut s'assurer qu'il existe un entier k tel que $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N^{(i)}} = 1$: si la procédure s'itère jusquà l'étape k, on obtient une solution $(\bar{Y}^k, \bar{Z}^k, \bar{U}^k)$ à l'EDSR de paramètres $(\tilde{f} := \sum_{i=1}^{k} f^{(i)},\ \tilde{B})$, sous la seule hypothèse de bornitude de $\tilde{B}$.
D'autre part et pour assurer l'itération de cette procédure, il faudra démontrer, pour toute solution Y^i à l'EDSR de paramètres $(f^{(i)},\ \frac{\tilde{B}}{N^{(i)}})$, l'estimation a priori, analogue à (5.11), suivante : $|Y^i|_{S^\infty} \leq |\xi^i|_{L^\infty(\mathcal{F}_T)}$.

L'objectif de la section suivante consiste à établir un résultat de stabilité analogue à celui de la section 5.3.3 pour une suite particulière d'EDSR de paramètres $(f^{2,m},\ \xi^2 := \frac{\tilde{B}}{N^{(2)}})$, où $(f^{2,m})$ est construite convergente vers $f^{(2)}$. Cette construction est faite de telle sorte qu'on assure l'existence d'une solution à chaque EDSR de paramètres $(f^{2,m}, \xi^2)$. Au final, on souhaite montrer un résultat de convergence vers une solution $(\tilde{Y}^2,\ \tilde{Z}^2,\ \tilde{U}^2)$ de l'EDSR de paramètres $(f^{(2)}, \xi^2 := \frac{\tilde{B}}{N^{(2)}})$ sous une nouvelle contrainte sur $\frac{\tilde{B}}{N^{(2)}}$ (et, en particulier, sur $N^{(2)}$).

Etape 2 : Nouveau raisonnement de stabilité

On établit ici un nouveau résultat de stabilité pour la famille d'EDSR de paramètres $(f^{2,m},\ \xi^2 := \frac{\tilde{B}}{N^{(2)}})$ où $f^{2,m}$ est construite ci-dessous et le résultat (de stabilité) est établi dans cette section sous une condition sur l'entier

$N^{(2)}$. On conserve les notations f^m et $f^{1,m}$ introduites à la section 5.3.2 lors de la construction de la première approximation et $(Y^{1,m}, Z^{1,m}, U^{1,m})$ désigne une solution de l'EDSR de paramètres $(f^{1,m}, \frac{\tilde{B}}{N})$ (N satisfaisant la condition (5.12) établie en section 5.3.3). On définit alors le générateur $f^{2,m}$, pour tout entier m, en posant

$$f^{2,m}(s,z,u) := f^m(s, z + Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, u + U_s^{1,m}) - f^m(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m}).$$

La suite d'EDSR qui nous intéresse est donc donnée par :

$$\begin{aligned} Y_t^{2,m} = \quad & \xi^2 + \int_t^T [f^m(s, Z_s^{2,m} + Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{2,m} + U_s^{1,m})ds \\ & - \int_t^T f^m(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m})]ds \\ & - \int_t^T Z_s^{2,m} dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} U_s^{2,m}(x) \tilde{N}_p(ds,dx). \end{aligned}$$

Cette famille de générateurs $(f^{2,m})$ satisfait en particulier la condition : $f^{2,m}(s,0,0) \equiv 0$. Toutefois, du fait que cette suite n'est plus croissante, le raisonnement de stabilité employé pour la suite d'EDSR de paramètres $(f^{1,m}, \xi^1)$ n'est plus possible. Cependant, à m fixé, les générateurs $f^{2,m}$ satisfont encore les hypothèses (H_1) et (H_2) et on a existence de solutions $(Y^{2,m},\ Z^{2,m},\ U^{2,m})$ ainsi que d'estimations a priori indépendantes de m. D'autre part, on vérifie que l'EDSR satisfaite par la somme, à savoir : $Y^{(2),m} := Y^{1,m} + Y^{2,m}$, est donnée par les paramètres $(f^m,\ \xi^1 + \xi^2)$ et, par conséquent, (f^m) étant une suite croissante, la suite de processus $(Y^{(2),m})$ est elle même croissante, uniformément bornée et donc, de ce fait, convergente : il en résulte la convergence de la différence : $Y^{2,m} = Y^{(2),m} - Y^{1,m}$. On note alors $\tilde{Y}^2$ la limite de cette dernière suite (et $\tilde{Z}^2$, $\tilde{U}^2$ les limites faibles des suites $(Z^{2,m})$ et $(U^{2,m})$, qui sont bornées dans les espaces $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$).
On applique alors la formule d'Itô à $|Y^{2,(m,p)}|^2 := |Y^{2,m} - Y^{2,p}|^2$ en prenant la forme intégrée entre 0 et T, puis on prend l'espérance :

$$\mathbb{E}(|Y_0^{2,(m,p)}|^2) + \ \mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_s^{2,(m,p)}|^2 ds\right) \ + \ \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^*} |U_s^{2,(m,p)}(x)|^2 n(dx) ds\right)$$

$$\leq \ \mathbb{E}\left(\int_0^T 2|Y_s^{2,(m,p)}||f^{2,m}(s, Z_s^{2,m}, U_s^{2,m}) - f^{2,p}(s, Z_s^{2,p}, U_s^{2,p})|ds\right). \qquad (I)$$

On cherche donc tout d'abord à contrôler la différence suivante :

$$\begin{aligned} F^{m,\,p} &= |f^{2,m}(s, Z_s^{2,m}, U_s^{2,m}) - f^{2,p}(s, Z_s^{2,p}, U_s^{2,p})| \\ &\le |f^m(s, Z_s^{2,m} + Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{2,m} + U_s^{1,m})| \\ &\quad + |f^p(s, Z_s^{2,p} + Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{2,p} + U_s^{1,p})| \\ &\quad + \ |f^m(s, Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m})| + \ |f^p(s, Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,p})|, \end{aligned}$$

et, on se sert à nouveau de l'hypothèse (H_1) qui est satisfaite par la suite de générateurs (f^m) (avec les mêmes paramètres que f ou $\tilde{f}$). Ces paramètres sont indépendants de l'entier m ou p et le lemme 5.3 assure donc que, pour tout entier m ou p, les processus $Z^{1,m}$ et $Z^{1,p}$ (respectivement $U^{1,m}$ et $U^{1,p}$) sont bornés indépendamment (de m ou de p) dans $L^2(W)$ (respectivement dans $L^2(\tilde{N}_p)$). On souhaite obtenir un contrôle uniforme en m (et en p) par un processus G à valeurs dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ de la somme suivante

$$|f^m(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m})| + \ |f^p(s, Z_s^{1,p} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,p})|.$$

On justifie en utilisant le résultat énoncé ci-dessous (une référence est le lemme 2.5 de la page 569 dans [KOB])

Lemme 5.6 *Soit $(Z^m)_m$ une suite de processus définis sur $[0, T]$ et satisfaisant que (Z^m) est de Cauchy pour la norme hilbertienne dans $L^2(W)$, i.e.*

$$\lim \sup_{m,p,\, m \ge p} \mathbb{E}\big(\int_0^T |Z_s^m - Z_s^p|^2 ds\big) \to 0, \textit{lorsque} \ \ p \to \infty$$

alors il existe une sous suite notée (m_j) telle que

$$\sup_{m \in (m_j)} |Z^m|^2 \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P}).$$

Quitte à ne considérer que des sous suites $(|Z^{1,m}|^2)$ et de $(|U^{1,m}|^2)$, on peut supposer

$$\sup_m |Z^{1,m}|^2 \ \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P}) \text{ et } \sup_m |U^{1,m}|^2_{L^2(n)} \ \in L^1(ds \otimes d\mathbb{P}),$$

et, puisque le processus $\frac{|\theta|^2}{\alpha}$ est borné (il appartient donc à $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$), il en résulte l'existence d'un processus G à valeurs dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ et tel que :

$$|f^m(s, Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,m})| + \ |f^p(s, Z_s^{1,p} - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s^{1,p})| \le G.$$

On exploite à nouveau la convexité de $z \to |z|^2$, celle de $|\cdot|^2_{L^2}$ et l'équivalence entre $|\cdot|^2_{L^2}$ et $|\cdot|_\alpha$ pour obtenir, d'une part :

$$\tfrac{\alpha}{2}|Z_s^{2,m} + Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2 \leq \tfrac{3\alpha}{2}(|Z_s^{2,(m,p)}|^2 + |Z_s^{2,p} - \tilde{Z}_s^2|^2 + |\tilde{Z}_{2,s} + Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2),$$

ainsi que :

$$|U_s^{2,m} + U_s^{1,m}|_\alpha \leq \tilde{C}\left(|U_s^{2,(m,p)}|_{L^2}^2 + |U_s^{2,p} - \tilde{U}_s^2|_{L^2}^2 + |\tilde{U}_s^2 + U_s^{1,m}|_{L^2}^2\right)$$

$$\leq \tilde{C}\big(|U_s^{2,(m,p)}|_{L^2}^2 + |U_s^{2,p} - \tilde{U}_s^2|_{L^2}^2 + |\tilde{U}_s^2 + U_s^{1,m}|_{L^2}^2\big),$$

(la notation L^2 est utilisée pour la norme hilbertienne $L^2(n)$ et, dans les inégalités précédentes, on exploite le résultat d'équivalence entre $|\cdot|_{L^2}^2$ et $|\cdot|_\alpha$ qui est vérifié avec la constante $\tilde{C}$).
On obtient de la même façon les contrôles suivants :

$$\text{et}\begin{cases} \tfrac{\alpha}{2}|Z_s^{2,p} + Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2 \leq \alpha\big(|Z_s^{2,p} - \tilde{Z}_s^2|^2 + |\tilde{Z}_s^2 + Z_s^{1,p} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2\big) \\ |U_s^{2,p} + U_s^{1,p}|_\alpha \leq \tilde{C}\big(|U_s^{2,p} - \tilde{U}_s^2|_{L^2}^2 + |\tilde{U}_s^2 + U_s^{1,p}|_{L^2}^2\big). \end{cases}$$

Il résulte finalement le contrôle suivant de la différence $F^{m,\,p}$:

$$F^{m,\,p} \leq G + \tfrac{3\alpha}{2}|Z_s^{2,(m,p)}|^2 + \tfrac{5\alpha}{2}(|Z_s^{2,p} - \tilde{Z}_s^2|^2 + |\tilde{Z}_s^2 + Z_s^{1,m} - \tfrac{\theta_s}{\alpha}|^2)$$

$$+ C_{\alpha,M_{\tilde{B}}}|U_s^{2,(m,p)}|_{L^2}^2 + 2\tilde{C}\big(|U_s^{2,p} - \tilde{U}_s^2|_{L^2}^2 + |\tilde{U}_s^2 + U_s^{1,m}|_{L^2}^2\big).$$

Le reste de la procédure est complètement analogue au résultat de stabilité établi dans la section 5.3.3 pour la suite d'EDSR de paramètres $(f^{1,m}, \frac{\tilde{B}}{N})$. On réécrit la formule d'Itô (I) en faisant passer dans le membre de gauche les termes contenant soit $|Z_s^{2,(m,p)}|^2$ soit $|U_s^{2,(m,p)}|_{L^2}^2$, ce qui fournit l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}(|Y_0^{2,(m,p)}|^2) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(1 - 3\alpha Y_s^{2,(m,p)}\big)|Z_s^{2,(m,p)}|^2 ds\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^*} \big(1 - 2\tilde{C}Y_s^{2,(m,p)}\big)|U_s^{2,(m,p)}|^2(x)n(dx)ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T 5\alpha Y_s^{2,(m,p)}(|Z_s^{2,p} - \tilde{Z}_s^2|^2 + |\tilde{Z}_s^2 + Z_s^{1,m} - \frac{\theta_s}{\alpha}|^2)ds\right)$$

$$+\mathbb{E}\left(\int_0^T 2\tilde{C}Y_s^{2,(m,p)}\big(|U_s^{2,p} - \tilde{U}_s^2|_{L^2}^2 + |\tilde{U}_s^2 + U_s^{1,m}|_{L^2}^2\big)ds\right).$$

Pour justifier les deux passages successifs à la limite (à savoir, lorsque m tend vers $+\infty$, p étant fixé, puis quand p tend vers $+\infty$), on impose alors la contrainte suivante

$$(1 - 16\alpha\frac{M_{\tilde{B}}}{N^{(2)}}) \geq \frac{1}{2} \text{ et } (1 - 12\tilde{C}\frac{M_{\tilde{B}}}{N^{(2)}}) \geq \frac{1}{2},$$

soit, de façon équivalente, on obtient la contrainte suivante sur $N^{(2)}$:

$$\frac{M_{\tilde{B}}}{N^{(2)}} = \inf\{\frac{1}{32\alpha}, \frac{1}{24\tilde{C}}\}. \tag{5.13}$$

Muni de cette dernière condition, on peut ainsi réécrire à l'identique le raisonnement décrit dans la section 5.3.3 et on démontre ainsi la convergence forte des suites $(Z^{2,m})$ et $(U^{2,m})$ respectivement vers $\tilde{Z}^2$ et $\tilde{U}^2$.

□

Désormais et comme pour chacun des résultats de stabilité déjà obtenus, on justifie le passage à la limite (en m) dans les suites d'EDSR de paramètres $(f^{2,m},\ \xi^2 := \frac{\tilde{B}}{N^2})$, ce qui permet d'identifier la limite $(Y^2,\ Z^2,\ U^2)$ de la suite de processus suivante :

$$(U^{1,m} + U^{2,m},\ Z^{1,m} + Z^{2,m},\ U^{1,m} + U^{2,m}),$$

comme étant une solution de l'EDSR de paramètres $(\tilde{f},\ \xi^1 + \xi^2)$.

Etape 3 : extension de la procédure

On vient de justifier dans la preuve précédente que l'on est capable de construire une solution notée $(Y^2,\ Z^2,\ U^2)$ à l'EDSR donnée par les paramètres $(\tilde{f},\ \xi^1 + \xi^2)$, avec : $\xi^1 + \xi^2 = \frac{\tilde{B}}{N^{(1)}} + \frac{\tilde{B}}{N^{(2)}}$ et on souhaite itérer la procédure expliquée à la section précédente afin de montrer l'existence d'un entier k pour lequel on ait existence d'un solution notée $(Y^k,\ Z^k,\ U^k)$ à l'EDSR de paramètres $(\tilde{f}, \sum_{i=1}^{k} \xi^k)$, où $\tilde{f}$ s'écrit

$$\tilde{f}(s,z,u) = \sum_{i=1}^{k} f^{(i)}(s,z,u),$$

avec la suite $(f^{(i)})$ qui est construite à l'étape 1 de cette section 5.3.5. Ceci est possible dès lors que l'on peut itérer la procédure décrite à l'étape 1 en justifiant l'existence un entier k tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N^{(i)}} = 1$. La réponse est positive puisque la suite $(N^{(i)})$ peut être choisie constante à partir du rang 2 (cette valeur donnée par la relation (5.13) ne dépend que du majorant $M_{\tilde{B}}$ de $\tilde{B}$: en effet, on vérifie que le raisonnement de la section précédente s'itère pour les suites d'EDSR de générateurs $f^{m,(k)}$ (pour $k \geq 3$) : ces générateurs satisfont le même type de contrôle et la preuve de l'étape 2 se réécrit à l'identique en remplaçant à l'étape k les processus $Z^{1,m}$, $U^{1,m}$ apparaissent dans l'expression de $f^{(2),m}$ (fortement convergents dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$) par $\bar{Z}^{m,(k)}$ et $\bar{U}^{m,(k)}$.

Etape 4 : conclusion

Dans les étapes précédentes, on a obtenu une solution à toute EDSR de paramètres $(\tilde{f},\ \tilde{B})$ avec $\tilde{B}$ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable (supposée seulement bornée) et on cherche à en déduire une solution pour toute EDSR de paramètres $(f,\ B)$ sous la condition de bornitude de B. Or, la solution (Y, Z, U) construite à la section précédente satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t = \tilde{B} + & \int_t^T [f(s, Z_s - \frac{\theta_s}{\alpha}, U_s) - f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0)]ds \\ & - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx). \end{aligned}$$

Désormais, on définit, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, les processus $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ et $\bar{U}$ de la façon suivante :

$$\bar{Y}_s = \big(Y_s - \int_0^s f(u, -\frac{\theta_u}{\alpha}, 0)du - \int_0^s \frac{\theta_u}{\alpha} dW_u\big),\quad \bar{Z}_s = Z_s - \frac{\theta_s}{\alpha} \text{ et } \bar{U}_s = U_s,$$

et si on définit $\tilde{B}$ comme suit

$$\tilde{B} := B + \int_0^T f(s, -\frac{\theta_s}{\alpha}, 0)ds + \int_0^T \frac{\theta_s}{\alpha} dW_s,$$

on vérifie que $\bar{Y}$ satisfait :

$$\bar{Y}_t = B + \int_t^T f(s, \bar{Z}_s, \bar{U}_s)ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s - \int_t^T \bar{U}_s \tilde{N}_p(ds, dx),$$

$(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{U})$ est solution de l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$.

5.4 Etude théorique dans le cadre non compact

5.4.1 Motivations et résultat

Dans cette partie, on étudie à nouveau le problème d'optimisation sous contraintes noté (P_1) dans la section 0.3.2 de l'introduction, mais on se place sous l'hypothèse que l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est fermé et non nécessairement compact. On conserve les notations et hypothèses de la section précédente et, en particulier, la mesure de Lévy est éventuellement de masse infinie (elle satisfait la condition $\int_{\mathbb{R}^*} (1 \wedge |x|)^2) n(dx) < \infty$). Appliquant la méthode de résolution dynamique (MD) à ce problème, on fait apparaitre l'EDSR (Eq2.1) de paramètres $(f,\, B)$, dont le générateur a pour expression

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |u - \pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha}. \quad (5.14)$$

On vérifie que, même sans la condition de compacité de l'ensemble $\mathcal{C}$ (ensemble de contraintes), le générateur satisfait encore l'hypothèse notée (H_1) du lemme 5.1 : plus particulièrement, si on suppose toujours : $0 \in \mathcal{C}$, le générateur satisfait les contrôles

$$\forall\, z, u \in \mathbb{R} \times L^2 \cap L^\infty(n),\ -\theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha} \leq f(s,z,u) \leq \frac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha.$$

Ces contrôles entrainent que les estimations a priori du lemme 5.3 de la section 5.2.1 sont vraies, pour toute solution (Y, Z, U) de l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$ (excepté évidemment le contrôle suivant du processus U : $|U_s|^2_{L^2(n)} \leq 4n(\mathbb{R} \setminus \{0\})|Y|^2_{S^\infty}$, lorsque n est de masse infinie). La principale difficulté théorique est que l'hypothèse (H_2) n'est plus vérifiée car les contrôles BMO des processus issus de la linéarisation des accroissements du générateur f n'existent plus. Ceci a pour conséquence que le raisonnement décrit en section 5.2.2 dans la preuve de l'unicité (théorème 5.1) n'est plus possible pour l'EDSR de paramètres (f, B). L'objectif de cette section consiste à prouver un nouveau résultat d'existence, dont on donne ci-dessous l'énoncé.

Théorème 5.4 *Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, l'EDSR de type (Eq2.1) et de paramètres $(f,\, B)$, dont la condition terminale B est bornée et dont l'expression du générateur est donnée par (5.14) avec la contrainte supplémentaire que l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est fermé mais non compact, on obtient l'existence d'une solution à l'EDSR appartenant à $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$.*

5.4.2 Preuve du nouveau résultat d'existence

Afin de justifier l'existence d'une solution à l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$, on procède à l'aide d'une approximation et en deux étapes :

- la première consiste à introduire l'ensemble compact $\mathcal{C}^m$ défini comme suit :

$$\mathcal{C}^m = \mathcal{C} \cap [-m, m],$$

et à considérer le problème d'optimisation restreint à l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}^m$. On lui associe l'EDSR de paramètres (f^m, B), pour laquelle on sait construire une solution $(Y^m,\ Z^m,\ U^m)$ et où le générateur f^m est défini pour tout m par

$$f^m(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}^m}\left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z+\frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |u-\pi\beta_s|_\alpha\right) \\ -\theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha}. \qquad (5.15)$$

- Dans une seconde étape, on établit un résultat de stabilité pour cette suite d'EDSR de paramètres $(f^m,\ B)$.

Etape 1 : construction et propriétés de l'approximation

On considère, dans cette étape, la suite d'EDSR de paramètres (f^m, B) avec le générateur f^m d'expression donnée par (5.15). L'objectif de cette étape est double : on justifie, d'une part, l'existence d'une solution $(Y^m,\ Z^m,\ U^m)$ pour tout m, et, d'autre part, on établit une liste de propriétés concernant le contrôle des normes et les convergences des suites (Y^m), (Z^m) et (U^m).
Or, puisque C^m est un ensemble compact, les résultats obtenus à la section précédente assurent l'existence d'une solution $(Y^m,\ Z^m,\ U^m)$. D'autre part et pour tout m, f^m satisfait l'hypothèse (H_1) avec les mêmes paramètres que f (indépendants de m) :

$$(H_1) \qquad -(\theta_s z + \tfrac{\theta_s^2}{\alpha}) \leq f(s,z,u) \leq \tfrac{\alpha}{2}|z|^2 + |u|_\alpha, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

La borne supérieure est donnée par le fait que la stratégie définie par : $\pi \equiv 0$, est à la fois dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}^m$. On applique ainsi les résultats du lemme 5.3 (du paragraphe 5.1.2) pour en conclure les deux propriétés suivantes :
- La suite (Y^m) est uniformément bornée dans S^∞.
- Les suites (Z^m) et (U^m) sont uniformément bornées dans leurs espaces de Hilbert respectifs, à savoir $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$.

On établit désormais un résultat de comparaison pour la suite d'EDSR de paramètres (f^m, B). Pour ce faire, on exploite les résultats établis dans le cadre compact et on reprend la procédure de linéarisation employée dans la section 5.2.2 pour justifier l'unicité. Vu que le raisonnement est analogue, on ne donne que les grandes lignes : l'idée consiste à considérer deux entiers n, p (tels que, par exemple, $n \geq p$) et à étudier la différence $Y^{n,p} := Y^n - Y^p$ entre les deux solutions des EDSR de paramètres (f^n, B) et (f^p, B). Pour cela, on écrit la formule d'Itô pour $Y^{n,p}$ en manipulant l'accroissement des générateurs comme suit

$$\begin{aligned}
& f^n(s, Z_s^n, U_s^n) - f^p(s, Z_s^p, U_s^p) \\
& = \underbrace{(f^n - f^p)(s, Z_s^n, U_s^n)}_{\leq 0} + f^p(s, Z_s^n, U_s^n) - f^p(s, Z_s^p, U_s^p) \\
& \leq (f^p(s, Z_s^n, U_s^n) - f^p(s, Z_s^p, U_s^n)) + f^p(s, Z_s^p, U_s^n) - f^p(s, Z_s^p, U_s^p).
\end{aligned}$$

On exploite, d'une part et à la première ligne, la décroissance de la suite de générateurs $(f^m)_m$, et, d'autre part, on linéarise les accroissements de f^p (dans l'inégalité de la deuxième ligne). Désormais, remplaçant f par f^p, on suit exactement le raisonnement de la section 5.2.2, auquel on renvoie pour les détails : on utilise ainsi les processus γ^p et λ^p issus de la linéarisation de f^p (f^p satisfait en effet une hypothèse analogue à (H_2), hypothèse donnée au lemme 5.1) et on effectue alors une transformation de Girsanov similaire à la preuve évoquée. Cette procédure permet de conclure que pour tous les entiers n, p ($n \geq p$), on a : $Y_s^n \leq Y_s^p$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, i.e la suite $(Y^m)_m$ est décroissante.
On peut alors donner un sens au processus $\tilde{Y}$ en posant :

$$\tilde{Y}_s = \lim_m \searrow \; Y_s^m, \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s. \tag{5.16}$$

D'autre part, on définit aussi les processus $\tilde{Z}$ et $\tilde{U}$ de façon unique à indistinguabilité près) comme les limites des suites $(Z^m)_m$ et $(U^m)_m$ au sens faible dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$.

La suite de générateurs (f^m) satisfait aussi une propriété à rapprocher du lemme 5.5 de la section précédente et essentielle afin de justifier le passage à la limite dans les EDSR de paramètres (f^m,B). Cette propriété est énoncée ci-dessous.

Lemme 5.7 *La suite $(f^m)_m$ de générateurs ainsi construite satisfait la propriété suivante :*
pour toutes suites (z^m) et (u^m) à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $L^2 \cap L^\infty(n)$, qui sont toutes deux convergentes dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n)$ et telles que, de plus, la suite (u^m) satisfait la condition :
- *La suite (u^m) est uniformément bornée dans $L^\infty(n)$.*

alors on a :

$$f^m(s, z^m, u^m) \to f(s, z, u), \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s, \text{ lorsque } m \to \infty.$$

Preuve du lemme 5.7

Pour tout z et u dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n)$, les générateurs f^m et f coincident (presque sûrement et pour tout s) lorsque m est assez grand. En effet, si on note π_s^* une valeur de l'argmin et puisque l'infimum de fonctionnelles convexes est bien défini, cet argmin se contrôle aisément à l'aide de $|z|$ et de $|u|_{L^2(n)}$. On utilise le fait que $0 \in \mathcal{C}$ pour obtenir :

$$\frac{\alpha}{2}|\pi_s^*\sigma_s - (z + \frac{\theta}{\alpha})|^2 \leq \frac{\alpha}{2}|z + \frac{\theta_s}{\alpha}|^2 + |u|_\alpha.$$

Puisque les paramètres σ, β et θ sont des processus (prévisibles) et bornés, on obtient, après des calculs élémentaires, l'existence d'une constante C satisfaisant :

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, s, \quad |\pi_s^*| \leq C\big(\sqrt{|z|^2 + |u|^2_{L^2(n)}} + 1\big).$$

(on exploite également la relation d'équivalence entre $|u|_\alpha$ et $|u|^2_{L^2(n)}$ donné dans le corollaire 5.1). Pour conclure, on remarque que les suites (z^m) et (u^m) sont convergentes et donc bornées respectivement dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n)$, et si on note z et u leurs limites respectives, il existe un rang $\tilde{m}$, tel que pour tout $m,\ m \geq \tilde{m}$, on ait :

$$|z^m|^2 \leq |z|^2 + 1 \text{ et } |u^m|^2_{L^2(n)} \leq |u|^2_{L^2(n)} + 1.$$

Pour tout entier m satisfaisant la condition :

$$m \geq \big[C\sqrt{|z|^2 + |u|^2_{L^2(n)} + 2} + 1\big] + 1,$$

(la notation $[\cdot]$ correspond à la partie entière), les générateurs f et f^m pris en (z^m, u^m) coincident, ce qui achève la preuve de ce lemme.

$\square$

Remarques

• On peut justifier la décroissance de $(Y^m)_m$ en anticipant sur les résultats du chapitre suivant. Les EDSR de paramètres $(f^m,\ B)$ étant reliées au problème d'optimisation d'ensemble de contraintes $\mathcal{C}^m$, l'application de la méthode dynamique (MD) permet de justifier l'expression suivante de la fonction valeur (notée $V^{m,B}(x)$ à la date t) :

$$V_t^{m,B}(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{C}^m} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\big(U_\alpha(x + \int_t^T \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}} - F)\big) = U_\alpha(x - Y_t^m).$$

(la justification de la dernière égalité est donnée à la section 6.2.1 du chapitre suivant).

Du fait de la première expression donnée à l'aide d'un suprémum, la suite de variables $(V^{m,B}(x))$ est croissante par rapport à m. L'égalité donnée par la seconde expression implique que la suite (Y_t^m) est décroissante ($\mathbb{P}$-p.s.).
• Un propriété essentielle est que la suite (U_s^m) est uniformément bornée dans $L^\infty(n)$ et, plus précisément, on a

$$|U_s^m|_{L^\infty(n)} \leq 2|Y^m|_{S^\infty}, \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

D'autre part, le résultat d'équivalence du corollaire 5.1 de la section 5.2.1 entre $|U_s^m|_\alpha$ et $|U_s^m|^2_{L^2(n(dx))}$ est toujours vérifié.

Désormais et afin de passer à la limite dans les EDSR de paramètres $(f^m,\, B)$ et d'en déduire le théorème, on justifie une fois encore un résultat de stabilité, qui est énoncé au lemme 5.8 dans le paragraphe qui suit. Pour l'établir, il faut prouver la convergence forte de la suite (Z^m) dans $L^2(W)$ et de (U^m) dans $L^2(\tilde{N}_p)$.

Etape 2 : Passage à la limite

L'objectif est de justifier le passage à la limite dans les EDSR de paramètres $(f^m,\, B)$ (et d'identifier le processus $(\tilde{Y},\, \tilde{Z},\, \tilde{U})$ comme étant une solution de l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$)

$$\begin{aligned} Y_t^m = Y_T^m + \int_t^T f^m(s, Z_s^m, U_s^m)ds \\ - \int_t^T Z_s^m dW_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}^*} U_s^m(x)\tilde{N}_p(ds,dx). \end{aligned} \tag{5.17}$$

A nouveau, on doit justifier les trois assertions suivantes, à savoir
(i) $Z^m \to \tilde{Z}$ (dans $L^2(W)$), lorsque m tend vers $+\infty$,
(ii)$U^m \to \tilde{U}$ (dans $L^2(\tilde{N}_p)$), lorsque m tend vers $+\infty$,
(iii) $\mathbb{E}\big(\int_0^T |f^m(s, Z_s^m, U_s^m)ds - f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s)|ds\big) \to 0$,
lorsque m tend vers $+\infty$.
On énonce ci-dessous le lemme dont le résultat constitue le principal ingrédient dans cette seconde étape.

Lemme 5.8 *La suite (Y^m, Z^m, U^m) construite satisfait les conditions suivantes :*
• *la convergence en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure suivante est vérifiée :*

$$f^m(s, Z_s^m, U_s^m) \to f(s, \tilde{Z}_s, \tilde{U}_s) \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s.$$

- *la suite (Y^m, Z^m, U^m) converge vers ($\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U}$) au sens suivant :*

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - \tilde{Y}_t|) + |Z^m - \tilde{Z}|_{L^2(W)} + |U^m - \tilde{U}|_{L^2(\tilde{N}_p)} \to 0.$$

De plus, sa limite est le triplet de processus ($\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U}$) qui est défini sur $S^\infty \times L^2(W) \times L^2(\tilde{N}_p)$ et satisfait l'EDSR de paramètres (f, B).

Fin de la preuve de l'existence On commence par établir l'existence d'une solution à l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$ en supposant acquis le point délicat de la preuve (car relativement technique), à savoir la convergence forte des suites (Z^m) et (U^m) dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$. Ce dernier point étant supposé acquis, (i) et (ii) en sont des conséquences directes (chaque convergence forte dans (i) et (ii) a lieue, quitte à considérer une sous suite).

Pour justifier la convergence dans $L^1(ds\otimes d\mathbb{P})$ dans (iii), il suffit d'établir les deux résultats suivants :
- La convergence en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure de $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$ vers $f(s, Z_s, U_s)$, d'une part,
- L'uniforme intégrabilité de la suite de variables $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$, d'autre part.

Pour le premier résultat et puisque les suites (Z^m) et (U^m) sont toutes deux convergentes dans leurs espaces de Hilbert respectifs à savoir $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$, il en résulte, quitte à prendre une sous suite, que (Z^m) (resp. (U^m)) converge en $ds \otimes d\mathbb{P}$-mesure vers $\tilde{Z}$ (resp. vers $\tilde{U}$). Le résultat de convergence en mesure désiré est une conséquence simple du lemme 5.7, dont les hypothèses sont satisfaites en considérant, à un ensemble de $ds\otimes d\mathbb{P}$-mesure nulle près, les suites $(Z_s^m(\omega))$ et $(U_s^m(\omega))$.
Pour la seconde assertion, on utilise le fait que chaque f^m satisfait encore les contrôles donnés par (H_1) (du lemme 5.1). Exploitant une fois encore l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour la minoration donnée par (H_1), on obtient la condition de domination suivante dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$:

$$\exists\, C_\alpha > 0,\ |f^m(s, Z_s^m, U_s^m)| \leq C_\alpha\big(1\ + (|Z_s^m|^2 + |U_s^m|_\alpha\big).$$

La constante notée C_α dépend de α et du paramètre θ, qui est borné. Puisque les suites (Z^m) et (U^m) convergent (fortement) respectivement dans $L^2(W)$ et $L^2(\tilde{N}_p)$ (ce résultat contenu dans le lemme 5.8 est établi au paragraphe suivant) on en déduit l'uniforme intégrabilité de ces suites et donc, on obtient celle de la suite $(f^m(s, Z_s^m, U_s^m))$, ce qui permet de conclure à l'assertion (iii).
Les assertions (i), (ii) et (iii) assurent que le passage à la limite dans les équations (5.17) est justifié et le triplet de processus $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ satisfait l'EDSR de paramètres $(f,\, B)$. On réécrit ci-dessous l'équation satisfaite par $\tilde{Y} - Y^m$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\tilde{Y}_t - Y_t^m|\right) - \mathbb{E}\big(|\tilde{Y}_0 - Y_0^m|\big) &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(s,\tilde{Z}_s,\tilde{U}_s) - f^m(s,Z_s^m,U_s^m)|ds\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t (\tilde{Z}_s - Z_s^m)dW_s|\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t (\tilde{U}_s - U_s^m)(x)\tilde{N}_p(ds,dx)|\right),
\end{aligned}$$

et on déduit de la convergence des intégrales stochatiques $((\tilde{Z} - Z^m)\cdot W))$ et $((\tilde{U} - U^m)\cdot \tilde{N}_p)$ ainsi que des inégalités de Doob la convergence suivante :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^m - \tilde{Y}_t|) \to 0, \quad \text{lorsque } m \to \infty.$$

Cette propriété est évidemment plus faible que la convergence dans S^∞, toutefois $\tilde{Y}$ est bien dans S^∞, en tant que limite (ponctuelle) de la suite (Y^m) qui est elle-même uniformément bornée dans S^∞.

□

Preuve du résultat de stabilité Afin d'achever la justification de ce lemme, on se concentre ici sur le point le plus délicat, à savoir la convergence forte des suites (Z^m) et (U^m). La conclusion du lemme (i.e. l'existence d'un triplet $(\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U})$ solution à l'EDSR de paramètres $(f,\,B)$) ayant été donnée au paragraphe précédent, il ne nous reste qu'à établir ce résultat de convergence forte : la preuve de ce résultat est très similaire à celle du lemme 5.4 et posant toujours $\phi_K(x) := \frac{e^{2Kx}-2Kx-1}{2K}$ $(= g_{2K}(x))$, on obtient l'expression suivante pour la semimartingale positive $\phi_K(Y^{p,l})_{l\geq p}$ (notant $Y^{p,\,l}$ au lieu de $Y^p - Y^l$) :

$$\begin{aligned}
&\phi_K(Y_0^{p,\,l}) + \mathbb{E}\left(K\int_0^T e^{2KY_s^{p,\,l}}\big(|Z_s^{p,\,l}|^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_{2K}(U_s^{p,\,l})(x)n(dx)\big)ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(e^{2KY_s^{p,\,l}} - 1\big)\big(f^p(s,Z_s^p,U_s^p) - f^l(s,Z_s^l,U_s^l)\big)ds\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(e^{2KY_s^{p,\,l}} - 1\big)\big(\frac{\alpha}{2}|Z_s^p|^2 + |U_s^p|_\alpha + \hat{C}_s + \frac{\alpha}{4}|Z_s^l|^2\big)ds\right). \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(e^{2KY_s^{p,\,l}} - 1\big)\big(\alpha(|Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2) + |U_s^p - \tilde{U}_s|_{2\alpha} + |\tilde{U}_s|_{2\alpha}\big)ds\right). \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\int_0^T \big(e^{2KY_s^{p,\,l}} - 1\big)\big(\hat{C}_s + \frac{\alpha}{4}\big(|Z_s^{p,l}|^2 + |Z_s^p - \tilde{Z}_s|^2 + |\tilde{Z}_s|^2\big)\big)ds\right),
\end{aligned}$$

où les derniers contrôles résultent du fait que chaque générateur f^p satisfait la même hypothèse de croissance, à savoir (H_1) (donnée dans le lemme 5.1 en section 5.1). Finalement, utilisant des manipulations élémentaires (analogues à celles employées dans la preuve de lemme 5.4) et exploitant le contrôle uniforme dans $L^1(ds \otimes d\mathbb{P})$ des processus $|Z^l - Z^p|^2$, $|\tilde{Z} - Z^p|^2$ et $|\tilde{Z}|^2$ et de $|\tilde{U} - U^p|^2_{L^2(n)}$ et $|\tilde{U}|^2_{L^2(n)}$, on justifie successivement les passages à la limite en l et p qui permettent d'affirmer :

$$\begin{cases} \lim_p \mathbb{E} \displaystyle\int_0^T \big(|\tilde{Z}_s - Z^p_s|^2\big) ds = 0, \\ \text{et} \\ \lim_p \mathbb{E} \displaystyle\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^*} \big(|(\tilde{U}_s - U^p_s)(x)|^2\big) n(dx) ds = 0. \end{cases}$$

□

Chapitre 6

Application à la maximisation de l'utilité

Dans ce chapitre, l'objectif est de résoudre un problème d'optimisation de portefeuille sous contraintes dans le contexte d'une filtration discontinue particulière. On conserve les notations prises lors de la présentation du modèle financier à la section 4.2.3 et on exploite les résultats théoriques obtenus au chapitre 5 concernant une classe d'EDSR quadratique et avec sauts. L'étude menée est très analogue à celle du chapitre 3 de la première partie de la thèse et qui correspond au modèle en filtration continue.

6.1 Le modèle financier : cas compact

On considère toujours l'espace de Wiener-Poisson introduit au début du chapitre 4, espace qui est muni de deux processus indépendants, à savoir un mouvement brownien unidimensionnel W et un processus de Poisson (associé à une mesure aléatoire compensée de Poisson notée $\tilde{N}_p$). On conserve la notation $\mathcal{F}$ pour désigner la filtration discontinue (restreinte à $[0,T]$) engendrée par ces deux processus et complétée. Le marché financier sur cet espace filtré ainsi défini consiste en un unique actif risqué dont l'évolution du processus de prix $S := (S_t)_{t\in[0,T]}$ est régie par l'EDS unidimensionnelle à sauts suivante :

$$\forall\ s \in [0,T],\ dS_s = S_{s-}\left(b_s ds + \sigma_s dW_s + \int_{\mathbb{R}^*} \beta_s(x)\tilde{N}_p(ds,dx)\right). \tag{6.1}$$

Dans toute cette section, la mesure de Lévy n est de masse finie. Les processus b, σ et β sont supposés bornés et prévisibles et le processus β est tel que $\beta > -1$, de sorte que le processus S est une exponentielle stochastique et un processus positif. D'autre part, on définit le processus θ de la manière suivante :

$$\theta = \sigma^{-1} b.$$

Ce processus θ est supposé borné et il appartient donc, a fortiori, à l'espace BMO(W), de sorte que la mesure de probabilité définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_T(-\theta \cdot W)$$

définit une densité de martingale. Cette condition sur le processus θ est classique et elle permet d'assurer que le marché satisfait la condition usuelle de non arbitrage. En particulier, sous la mesure équivalente $\mathbb{P}^\theta$, le processus $W^\theta = W + \int_0^{\cdot} \theta ds$ est un nouveau mouvement brownien et S est une $\mathbb{P}^\theta$ martingale locale. On garde les notations X^π et π pour désigner les processus de richesse et stratégie associée, où le processus X^π est définie (sur $[0,T]$) par

$$\forall t \in [0,T], \quad X_t^\pi = x + \int_0^t \pi_s \frac{dS_s}{S_{s_-}}. \tag{6.2}$$

Toute stratégie $\pi := (\pi_s)_{s\in[0,T]}$ est un processus unidimensionnel et prévisible, qui satisfait

· la condition minimale d'intégrabilité suivante

$$\mathbb{E}\big(\int_0^T |\pi\sigma_s|^2 ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\pi\beta_s(x)|^2 n(dx)ds\big) < \infty, \tag{6.3}$$

· $\pi_t \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout t,
(sauf mention contraire, l'ensemble $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$) est compact).

La dernière condition à imposer pour résoudre le problème d'optimisation est une condition dite d'admissibilité (donnée par la définition 0.3). Dans le paragraphe qui suit, on justifie à l'aide du lemme 6.1 que toute stratégie π à valeurs dans $\mathcal{C}$ est telle que le processus X^π satisfait (6.3), et que de plus, elle est automatiquement admissible (au sens de la définition 0.3).

Remarques

Le réel $\pi_t(\omega)$ correspond à la somme d'argent investie à la date t dans l'actif risqué. On précise, d'autre part, l'ensemble $\mathcal{C}$, dans lequel les stratégies π prennent leurs valeurs, est un sous ensemble $\mathcal{C}$ compact de $\mathbb{R}$ et non nécessairement convexe, comme dans l'article [HU05]. En particulier, il résulte immédiatement de la compacité de $\mathcal{C}$ ainsi que des conditions de bornitude imposées sur les différents paramètres de l'EDS (6.1) que le processus de richesse X^π satisfait (6.3). Le marché financier libre d'arbitrage est incomplet :une première source d'incomplétude est la présence de contraintes. La seconde provient de la présence de deux facteurs de risques modélisés dan l'équation de S par l'intégrale brownienne et celle par rapport à la mesure aléatoire de Poisson qui ne peuvent être couverts par la présence du seul actif risqué modélisé par S. Des exemples de telle modélisation sont fournis par le modèle à volatilité stochastiques avec sauts de Barndorff-Nielsen et Shephard (ce modèle est étudié pour le problème de maximisation de l'utilité exponentielle sous l'angle de la recherche de l'expression de la densité de Hellinger dans [BEN05]) ou encore dans la modélisation d'un instant de défaut en théorie du risque de crédit (une référence en est [BIE]).

Un lemme essentiel

Lemme 6.1 *Dans le cadre où l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est compact, toute stratégie π (i.e. t.q. π est un processus unidimensionnel, prévisible, prenant ses valeurs dans $\mathcal{C}$ et tel que X^π vérifie (6.3) et satisfait la condition :*

$$\{\exp(-\alpha X^\pi_\tau), \tau \ \ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\}$$
$$\text{est une famille uniformément intégrable.} \tag{6.4}$$

Preuve du Lemme 6.1

On précise tout de suite que c'est sous cette dernière condition (6.4) que nous justifions, par la suite, l'emploi de la méthode dynamique notée (MD) en section 0.3.2 (et déjà employée dans le cadre brownien par [HU05]). On considère le processus $U = (e^{-\alpha X^\pi_t})_{t\in[0,T]}$, pour toute stratégie π à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{C}$. On utilise tout d'abord l'expression de X^π donnée comme l'intégrale stochastique par rapport au processus de prix S par (3.4), la définition du processus S donnée par (6.1), et de la définition du processus θ pour écrire :

$$dX^\pi_t = \pi_t\sigma_t\theta_t dt + \pi_t\sigma_t dW_t + \int_{\mathbb{R}^*} \pi_t\beta_t\tilde{N}_p(dt, dx).$$

Dans un second temps, on applique une formule d'Itô généralisée au processus $U = e^{-\alpha X^\pi}$ (on renvoie le lecteur au Théorème 5.1 du Chapitre 2 de [IKE] ou aussi au théorème 18 du chapitre V du [PRO])) :

$$dU_t = U_t\big(- \alpha\pi_t\sigma_t dW_t + \textstyle\int_{\mathbb{R}^*}(e^{-\alpha\pi_t\beta_t} - 1)\tilde{N}_p(dt, dx)\big)$$
$$+U_t\big(- (\alpha\pi_t\sigma_t\theta_t)dt + \tfrac{\alpha^2}{2}|\pi_t\sigma_t|^2 dt + \textstyle\int_{\mathbb{R}^*}(e^{-\alpha\pi_t\beta_t} - 1 + \alpha\pi_t\beta_t)n(dx)dt\big).$$

On utilise alors la définition de l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ de M pour écrire le processus U sous forme produit :

$$U_t = U_0\mathcal{E}_t\big(\int_0^\cdot -\alpha\pi_s\sigma_s dW_s + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}^*}(e^{-\alpha\pi_s\beta_s} - 1)\big)\tilde{N}_p(ds, dx))e^{\bar{A}^\pi_t}, \tag{6.5}$$

où le processus $\bar{A}^\pi$ est donné par l'expression :

$$\bar{A}^\pi_t = \int_0^t \left(-\alpha\pi_s\sigma_s\theta_s + \frac{\alpha^2}{2}|\pi_s\sigma_s|^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{-\alpha\pi_s\beta_s} - 1 + \alpha\pi_s\beta_s)n(dx) \right) ds.$$

Ce processus $\bar{A}^\pi$ est borné du fait des hypothèses de bornitude des paramètres de l'EDS (6.1) et de la compacité de l'ensemble $\mathcal{C}$. D'autre part, en conséquence du lemme 4.1, l'exponentielle stochastique apparaissant dans l'expression de U est une vraie martingale. Il résulte de la décomposition (6.5) que la condition d'uniforme intégrabilité du lemme 6.1.

□

6.2 Résolution du problème d'optimisation

6.2.1 Expression de la solution au problème d'optimisation

Dans cette section, on revient au problème de maximisation de l'utilité exponentielle d'un portefeuille présenté a la section 0.3.2. Ce problème consiste à déterminer une expression de la fonction valeur $V^B(x)$ à la date $t = 0$ et cette expression est donnée par :

$$V^B(x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(U_\alpha(X^\pi_T - B)), \tag{6.6}$$

où B désigne l'actif contingent et où toute stratégie π est définie sur $[0, T]$. Le processus de richesse $X^\pi := X^{\pi,0,x}$ associé (à la stratégie π) est donné par

$$\forall\ s \in [0, T],\ X^\pi_t = x + \int_0^t \pi_s \frac{dS_{s-}}{S_s},$$

expression dans laquelle x désigne la richesse initiale et où le processus S de prix est donnée par l'EDS à sauts (6.1). L'ensemble d'admissibilité noté $\mathcal{A}$ (plutôt que $\mathcal{A}_0$) regroupe l'ensemble des processus $\pi := (\pi_s)_{s\in[0,T]}$ unidimensionnels, prévisibles, satisfaisant la condition d'intégrabilité (6.3) donnée au début de chapitre, et tels que la famille

$$\{\exp(-\alpha X^\pi_\tau),\ \tau\mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\},$$

est uniformément intégrable. On donne ci-après le résultat majeur de cette partie.

Théorème 6.1 *Une expression de la fonction valeur à la date $t = 0$ noté $V^B(x)$ est fournie par :*

$$V^B(x) = -\exp(-\alpha(x - Y_0)), \tag{6.7}$$

où le nombre réel Y_0 représente la valeur initiale associée à la solution (Y, Z, U) de l'EDSR (Eq2.1) caractérisée par les paramètres $(f,\ B)$, et dont le générateur f est défini comme suit :

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u - \pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta z - \frac{|\theta|^2}{2\alpha}.$$

D'autre part, il existe au moins une stratégie optimale et toute stratégie optimale est admissible (i.e. $\pi^* \in \mathcal{A}$) et caractérisée, $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s, comme suit :

$$\pi_s^* \in \underset{\pi\in\mathcal{C}}{argmin} \big(\frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (Z_s + \frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |U_s - \pi\beta_s|_\alpha \big). \qquad (6.8)$$

Toute stratégie optimale π^* est telle que :

$$\mathbb{E}(R_T^{\pi^*}) = \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^{\pi^*} - B)) = R_0 = V^B(x).$$

Dans le corollaire qui suit, on considère le problème d'optimisation à la date t (introduit en section 0.3.2 de la thèse), auquel on associe la fonction valeur notée $V_t^B(x)$ défini à la date t par

$$V_t^B(x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(U_\alpha(x + \int_t^T \pi_s \frac{dS_s}{S_{s-}} - B)),$$

où le processus de richesse $X^\pi := X^{\pi,t,x}$ est défini sur $[t, T]$ comme suit :

$$\forall s \in [t, T], \quad X_s^\pi = x + \int_t^s \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}},$$

et où $\mathcal{A}_t$ regroupe l'ensemble des stratégies $\pi := (\pi_s)_{s\in[t,T]}$ définies sur $[t, T]$ et admissibles au sens de la définition 0.3.

Corollaire 6.1 *On obtient les deux résultats suivants pour la fonction valeur notée $V_t^B(x)$ à la date t :*

- *D'une part, la fonction valeur s'écrit à la date t en terme de la solution de l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$ sous la forme :*

$$V_t^B(x) = U_\alpha(x - Y_t) = -\exp(-\alpha(x - Y_t)) = R_t^{\pi^*},$$

où π^* est une stratégie définie sur $[t, T]$ qui satisfait la relation (6.8).

- *On retrouve l'énoncé du principe de la programmation dynamique :*

$$\forall \sigma, \tau,\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt},\ (\tau \le \sigma), \quad V_\tau^B(x) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(V_\sigma^B(X_\sigma^{\pi^*,\tau,x})). \qquad (6.9)$$

Remarque et preuve du corollaire 6.1

On suppose acquis les résultats du théorème 6.1 : par un raisonnement complètement analogue à celui mené dans la section 3.1.2 de la première partie, il en résulte le principe de la programmation dynamique : en effet, dès lors que l'on connait l'existence d'une stratégie optimale π^* et que l'on se donne deux temps d'arrêt τ et σ ($\tau \leq \sigma$) la propriété (6.9) résulte du théorème de Doob (appliquée à la martingale $R^{\pi^*} := U_\alpha(X^{\pi^*} - Y)$)

$$\begin{aligned} V_\tau^B(x) = U_\alpha(X_\tau^{\pi^*,\tau,x} - Y_\tau) \quad &= \mathbb{E}\big(U_\alpha(X_\sigma^{\pi^*,\tau,x} - Y_\sigma)|\mathcal{F}_\tau\big) \\ &= \mathbb{E}\big(V_\sigma^B(X_\sigma^{\pi^*,\tau,x})|\mathcal{F}_\tau\big), \end{aligned}$$

où : $X_\sigma^{\pi^*,\tau,x} = x + \displaystyle\int_\tau^\sigma \pi_u^* \frac{dS_u}{S_{u-}}$. La dernière propriété permet d'assurer une propriété de consistance pour la fonction valeur : en effet, celle ci dit que la meilleure prédiction à une date t donnée de la fonction valeur coincide avec la valeur du problème d'optimisation à cette date. En particulier, ceci implique que toute stratégie optimale pour le problème, à un date t donnée, l'est encore pour tout autre date s ($s > t$).

Preuve du résultat principal

Dans une première étape et afin d'assurer la validité de l'expression donnée par (6.7), on justifie les calculs formels effectués dans la section 4.2.3 introductive de ce chapitre. Ces calculs ont notamment permis de donner une expression du générateur de l'EDSR. Muni des résultats de l'étude théorique du chapitre 5, on souhaite établir que, pour toute stratégie π ($\pi \in \mathcal{A}$), le processus R^π (défini sur $[0,T]$) est une surmartingale.
Pour résoudre à l'aide de la méthode (MD) le problème, on a introduit en section 4.2.3 le processus positif $\bar{R}^\pi$. Pour le problème considéré à la date t $= 0$, ce dernier est défini par

$$\forall\ s \in [0,T], \quad \bar{R}_s^\pi := \frac{\exp(-\alpha(X_s^\pi - Y_s))}{\exp(-\alpha(x - Y_0))}.$$

On rappelle ci-dessous l'expression obtenue à l'aide de la formule d'Itô pour ce processus

$$\forall\ s \in [0,T], \;\; \bar{R}_s^\pi = \tilde{M}_s^\pi \exp(A_s^\pi),$$

où $\tilde{M}^\pi$ est l'exponentielle stochastique associée à une martingale locale M^π qui est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_s(M) = \mathcal{E}_s\Big((-\alpha(\pi\sigma - Z)\cdot W) + (e^{(-\alpha(\pi\beta - U))} - 1)\cdot \tilde{N}_p)\Big),$$

et où l'expression de A^π est donnée, pour tout s, $s \in [0,T]$, par :

$$A_s^\pi = \int_0^s \alpha\left(-\pi_u b_u - f(u, Z_u, U_u) + \frac{\alpha}{2}|\pi_u\sigma_u - Z_u|^2 + |(U_u - \pi_u\beta_u)|_\alpha\right) du.$$

D'une part, la partie discontinue de la martingale exponentielle $\tilde{M}^\pi$ est

$$\exp((-\alpha(\pi\beta - U)) - 1) \cdot N_p)_s :=$$

$$\sum_{0<u\leq s} \big(e^{-\alpha(\pi\beta_u(p(u)) - U_u(p(u))} - 1\big)\mathbf{1}_{u\in D_p}\mathbf{1}_{x=p(u)}.$$

D'après la formule de Doléans-Dade, le processus $\tilde{M}^\pi$ est, en tant qu'exponentielle stochastique de sauts strictement supérieurs à -1, une martingale locale positive (pour toute stratégie π). Ce processus étant une martingale locale, il existe une suite de temps d'arrêt (τ^n) ((τ^n) converge vers T) telle que $\tilde{M}^\pi_{.\wedge\tau^n}$ est une martingale. D'autre part, l'hypothèse de croissance du processus $\exp(A^\pi)$ entraine que le processus $\bar{R}^\pi_{.\wedge\tau^n}$ défini par

$$\forall\, s,\ \ \bar{R}^\pi_{s\wedge\tau^n} = \tilde{M}^\pi_{s\wedge\tau^n}\exp(A^\pi_{s\wedge\tau^n}),$$

satisfait la relation de sousmartingale

$$\forall\, t, s,\ t \leq s,\ \forall A \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{E}(\bar{R}^\pi_{s\wedge\tau^n}\mathbf{1}_A) \geq \mathbb{E}(\bar{R}^\pi_{t\wedge\tau^n}\mathbf{1}_A). \tag{6.10}$$

Dśormais, afin de justifier que le processus R^π satisfait la propriété de surmartingale (i.e de façon équivalente, $\bar{R}^\pi$ est une sousmartingale), il suffit de montrer qu'il est de classe (D). Or, par définition, le processus R^π s'écrit

$$\forall\, s \in [0,T],\ \ R^\pi_s = -\exp(-\alpha X^\pi_s)\exp(\alpha Y_s),$$

dont il résulte l'uniforme intégrabilité de la famille $(R^\pi_{.\wedge\tau^n})_n$, grâce aux deux faits suivants :
• l'hypothèse d'uniforme intégrabilité de la famille $(\exp(-\alpha X^\pi_\tau))$, lorsque τ parcourt l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt (cette hypothèse est vérifiée pour toute stratégie π prenant ses valeurs dans $\mathcal{C}$ selon les conditions du lemme 6.1),
• la bornitude du processus Y (associé à la solution de l'EDSR donnée par $(f,\, B)$).
Le passage à la limite (lorsque n tend vers ∞) dans la relation (6.10) est donc justifié et il s'ensuit que, pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $\mathbb{E}(R^\pi_s\mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(R^\pi_t\mathbf{1}_A)$, ce qui entraine la propriété de surmartingale de R^π.

Afin de prouver le théorème, il ne reste plus qu'à justifier l'expression de la fonction valeur à la date $t = 0$ (à savoir $V^B(x)$). Ceci s'effectue en montrant parallèlement l'existence d'une stratégie optimale π^* satisfaisant la relation (6.8). A priori, cette relation ne définit π^* que ponctuellement (i.e. pour s, ω fixés) et il faut donc justifier l'existence d'une sélection prévisible : la preuve de cette propriété est reléguée au paragraphe 6.2.2 suivant. Or, au vu de l'expression donnée par (6.8), l'Argmin existe (en effet, ce dernier est l'argument minimum d'une somme de deux fonctionnelles convexes à valeurs presque sûrement finies) et on peut définir ponctuellement (i.e. $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout s) le processus π^*. D'autre part, puisque que la condition : $A^{\pi^*} \equiv 0$ est satisfaite et exploitant à nouveau la décomposition multiplicative obtenue dans la section 4.2.3, le processus R^{π^*} s'écrit :

$$R_.^{\pi^*} = R_0^{\pi^*} \tilde{M}_.^{\pi^*}.$$

Ce processus est donc une martingale locale. Il suffit de montrer que R^{π^*} est une vraie martingale, i.e. que la famille

$$\{R_\tau^{\pi^*} := -\exp(-\alpha X_\tau^{\pi^*}) \exp(\alpha Y_\tau), \quad \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\},$$

est uniformément intégrable. Ceci est vérifié puisque l'admissibilité de π^* au sens de la définition 0.3 est automatique (invoquant le lemme 6.1) et que, le processus Y est borné. On traduit alors ci-dessous la condition (d'optimalité) de martingale du processus R^{π^*}, en se rappelant que R^π est (pour toute stratégie π admissible) une surmartingale.

$$\mathbb{E}(R_T^{\pi^*}) = R_0 = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(R_T^\pi)\ (= V^B(x)).$$

(le supremum est donc un maximum atteint en π^*).
Si on note (Y, Z, U) la solution unique à l'EDSR de paramètres $(f,\ B)$, on obtient ainsi l'expression donnée par la relation (6.7) pour la fonction valeur $V^B(x)$ donnée par (6.6), et correspondant au problème d'optimisation pris à la date $t = 0$.

□

6.2.2 Caractérisation des stratégies optimales

Le lemme suivant répond positivement aux deux problèmes d'existence et de prévisibilité de toute stratégie π^* satisfaisant (6.8).

Lemme 6.2 *Soient Z et U deux processus prévisibles prenant leur valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $L^2(n(dx))$ et $\mathcal{C}$ un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$.*

a. Le processus F defini ci-dessous est prévisible :

$$\forall s \in [0, T]\,,\ F(s, Z_s, U_s) = \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (Z_s + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |U_s - \pi\beta_s|_\alpha.$$

b. Il existe un processus prévisible π^* qui réalise, pour tout s et tout ω, le minimum sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de la somme des deux fonctionnelles suivantes

$$\frac{\alpha}{2} |\pi\sigma_s - (Z_s + \frac{\theta}{\alpha})|^2 \quad et \quad |U_s - \pi\beta_s|_\alpha.$$

Preuve du lemme 6.2

La preuve de l'assertion a. se déduit en remarquant que le processus F peut s'écrire sous la forme :

$$F(s, Z_s, U_s) = \inf_{\pi \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Q}} \frac{\alpha}{2} |\pi \sigma_s - (Z_s + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |U_s - \pi \beta_s|_\alpha,$$

processus qui est clairement prévisible, en tant que l'infimum pris sur un ensemble au plus dénombrable de la somme de fonctionnelles de processus prévisibles.
Afin de prouver l'assertion b., on reprend l'argumentation donnée dans le lemme 3.1 de [ELK97c] pour justifier l'existence de la sélection prévisible : pour ce faire, on introduit pour tout t, ω, π tels que : $(t, \omega) \in \Omega \times [0, T]$ et $\pi \in \mathbb{R}$, le processus G suivant

$$G(t, \omega, \pi) = |f(t, \omega, \pi, Z_t(\omega), U_t(\omega)) - \inf_{\pi \in \mathcal{C}} f(t, \omega, \pi, Z_t(\omega), U_t(\omega))| + (1 - \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\pi)).$$

G ainsi défini possède les deux propriétés suivantes

- A π fixé, $G(., ., \pi)$ est $\mathcal{P}$-mesurable,
- t, ω étant fixés, $G(t, \omega, .)$ est continue,

donc, G est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.
Comme, de plus, l'ensemble $\{\pi \in \mathbb{R}, G(t, \omega, \pi) = 0\}$ est non vide, dès que $\mathcal{C}$ est fermé (et non nécessairement compact) :en effet, pour tout t, ω, la somme des deux fonctionnelles (continues en z et u) intervenant dans l'expression de $f(t, \omega, \pi, Z_t(\omega), U_t(\omega))$ tend vers $+\infty$, quand $|\pi|$ tend vers ∞.
Il existe donc une sélection $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable noté π^* telle que $G(t, \omega, \pi^*(t, \omega)) = 0$, et donc en particulier : $\pi^*(t, \omega) \in \mathcal{C}$.
Ainsi et d'après la caractérisation donnée par (4.4), le processus π^* est à valeurs dans $\mathcal{C}$. L'admissibilité de π^* au sens précisé dans la définition 0.3 de l'introduction est alors justifiée par le lemme 6.1.

□

6.3 Cadre non compact : application au problème d'optimisation

Motivation Dans cette section, on s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation toujours noté $(P1)$ dans le cadre de la section 5.4.1, i.e. l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est fermé mais non compact et la mesure de Lévy n est éventuellement de masse infinie. Pour le reste, on conserve les notations de la section 6.1 de ce chapitre concernant l'application au problème dans le cas où l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact. En particulier, on considère à nouveau un marché financier dans le contexte de l'espace de Wiener Poisson et sur lequel le processus de prix S de l'unique actif risqué satisfait l'EDS

$$dS_s = S_{s-}\left(b_s ds + \sigma_s dW_s + \int_{\mathbb{R}^*} \beta_s(x)\tilde{N}_p(ds, dx)\right), \qquad (6.11)$$

avec les conditions suivantes

1. La mesure n de Lévy (associée au compensateur $\hat{N}_p$) satisfait
$$\int_{\mathbb{R}^*} (1 \wedge |x|)^2) n(dx) < \infty.$$
2. Les processus b, σ, β et $\theta := \sigma^{-1}b$ sont prévisibles et bornés.
3. Le processus β auquel on associe à l'intégrale stochastique $\beta \cdot \tilde{N}_p$ satisfait la condition
$$(\beta_s(x) > -1) \text{ et } (|\beta_s(x)| \leq C(1 \wedge |x|)), \ \mathbb{P}\text{-p.s. et pour tout } s,$$
et cette dernière condition assure que l'intégrale stochastique $\beta \cdot \tilde{N}_p$ est de carré intégrable sous l'hypothèse : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} (1 \wedge |x|)^2) n(dx) < \infty$).

Sous ces conditions, le processus S est une exponentielle stochastique à valeurs positives. Pour étudier le problème $(P1)$, i.e. afin de déterminer l'expression de la fonction valeur à la date $t = 0$ (notée $V_0^B(x)$), on conserve la notation $\mathcal{A}$ donnée dans la définition 0.3 pour désigner l'ensemble des stratégies auxquelles on applique la méthode (MD) introduite dans la section 0.3.2. On rappelle la relation définissant le processus $X^\pi := X^{\pi,0,x}$ associé à une stratégie appartenant à $\mathcal{A}$

$$\forall\, \pi \in \mathcal{A},\ \forall s \in [0, T],\ X_s^\pi = x + \int_0^s \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}}.$$

Dans ce cadre particulier, le problème consiste à répondre aux problèmes suivants

(a) la justification de la méthode dynamique de résolution pour exprimer la fonction valeur à la date $t := 0$ définie par

$$V_0^B(x) = \max_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi - B)), \tag{6.12}$$

en fonction de la solution de l'EDSR introduite par l'intermédiaire de (MD).

(b) la justification de l'existence d'au moins une stratégie π^* optimale et admissible (au sens de l'appartenance à $\mathcal{A}$).

Avant d'énoncer les résultats, on insiste sur ce qui fait l'une des difficultés majeures de cette étude. Dans ce qui suit, le point le plus délicat à justifier est le second (noté (b)). La démarche suivie consiste, dans un premier temps, à introduire une seconde classe d'admissibilité plus large que la première : on démontre alors que toute stratégie optimale pour le problème $(P1)$ (i.e. réalisant le maximum dans l'expression du problème $(P1)$) appartient à cette nouvelle classe. Dans un second temps, on justifie que le supremum dans le problème noté (6.12) pris sur la classe d'admissibilité $\tilde{\mathcal{A}}$ plus large coincide avec celui pris sur la classe $\mathcal{A}$. Ce dernier résultat est énoncé au travers d'un lemme donnant l'égalité de deux problèmes d'optimisation.

6.3.1 Hypothèses et énoncés des résultats

Préliminaires théoriques La mesure de probabilité $\mathbb{Q}^\theta$ est définie par la densité de probabilité :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}}) = \mathcal{E}_t(-\theta \cdot W).$$

Le processus risque premium θ étant supposé borné, la martingale exponentielle $\mathcal{E}(-\theta \cdot W)$ est une vraie martingale. Cette mesure est donc une densité de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. D'autre part, sous cette hypothèse forte de bornitude, le critère de Novikov donne l'intégrabilité dans les espaces L^p (pour $p > 1$) de la variable $Z_T^\theta := \mathcal{E}_T(-\theta \cdot W)$ et en particulier, on utilisera que Z_T^θ est de carré intégrable. Désormais, pour justifier l'emploi de notre méthode dynamique de résolution, on est contraint, comme dans le cas compact, de restreindre l'ensemble des stratégies. On définit ainsi ci-dessous deux classes d'admissibilité.

Définition 6.1 – *L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}$ consiste en l'ensemble des processus unidimensionnels $\pi := (\pi_s)_{s\in[0,T]}$ et prévisibles satisfaisant à la fois*
- $\pi_s \in \mathcal{C}$ *($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout $s \in [0,T]$),*
- *l'intégrale stochastique $(\int_0^s \pi_u \frac{dS_u}{S_{u-}})_{s\in[0,T]}$ avec S dfinie par (6.11)*

satisfait la condition d'intégrabilité suivante

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T |\pi\sigma_s|^2 ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\pi\beta_s(x)|^2 n(dx)ds\Big) < \infty,$$

- *la condition d'intégrabilité suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha X_T^\pi}) < \infty.$$

– *L'ensemble $\mathcal{A}$ est constitué de tous les processus unidimensionnels π et prévisibles satisfaisant à nouveau les deux premières conditions : à savoir : $\pi_s \in \mathcal{C}$ ($\mathbb{P}$-p.s. et pour tout $s \in [0,T]$) et X^π vérifie toujours la condition (6.3) énoncée en début de chapitre. En outre, ils satisfont :*

$$\{\exp(-\alpha X_\tau^\pi), \tau \ \ \mathcal{F}_t\text{-temps d'arrêt}\}$$

est une famille uniformément intégrable.

On utilise les hypothèses énoncées au début de cette section 6.3 et la définition 6.1 afin de démontrer la propriété suivante : pour toute stratégie dans $\tilde{\mathcal{A}}$, le processus X^π est une $\mathbb{Q}^\theta$-martingale. Or, sous l'hypothèse de bornitude du processus θ, la mesure $\mathbb{Q}^\theta$ est une mesure de martingale pour le processus de prix S de l'actif risqué et il en résulte que X^π est une $\mathbb{Q}^\theta$ martingale locale : afin de démontrer le caractère de martingale, on justifie l'appartenance de la variable $\sup_{0\le t\le T} |X_t^\pi|$ à $L^1(\mathbb{Q}^\theta)$. On utilise alors la définition du processus de richesse X^π et l'appartenance à $\mathbb{S}^2(\mathbb{R})$, pour en déduire les contrôles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^\pi|) &\le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^\pi| \frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}}) \\ &\le \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(\sup_{0\le t\le T} |X_t^\pi|\big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(\tfrac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}}\big)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure sachant que la densité est dans $L^2(\mathbb{P})$. Cette propriété est très utile afin de démontrer le résultat d'égalité entre les deux problèmes d'optimisation sur $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ et comme expliqué dans le paragraphe introductif de cette section pour répondre à la problématique (b).

Enoncé des résultats

Théorème 6.2 *Sous l'hypothèse que l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est fermé et non compact, on a les résultats suivants :*
• *le problème (6.12) précédent s'écrit à nouveau sous la forme suivante*

$$V_0^B(x) = \exp(-\alpha(x - Y_0)),$$

où le processus Y (plus exactement le triplet (Y, Z, U)) est une solution de l'EDSR avec sauts de paramètres f, B. L'expression du générateur (identique au cas compact), obtenue dans la section théorique, est la suivante. :

$$f(s,z,u) = \inf_{\pi\in\mathcal{C}} \left(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (z + \frac{\theta}{\alpha})|^2 + |u - \pi\beta_s|_\alpha \right) - \theta_s z - \frac{|\theta_s|^2}{2\alpha}.$$

• *Il existe une sélection prévisible d'un processus π^* satisfaisant*

$$\pi^*(s) \in \mathit{argmin}_{\pi\in\mathcal{C}} \big(\frac{\alpha}{2}|\pi\sigma_s - (Z_s + \frac{\theta_s}{\alpha})|^2 + |U_s - \pi\beta_s|_\alpha\big),\ \mathbb{P}\text{-}p.s. \text{ et pour tout } s,$$

et tel que tout processus π^* satisfaisant cette relation appartient à $\mathcal{A}$.

Lemme 6.3 *Sous les hypothèses suivantes sur le marché financier :*
• *Le processus de risque premium θ est prévisible borné (ainsi que tous les paramètres de l'EDS régissant l'évolution de notre processus S),*
• *l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ est fermé mais non compact et non nécessairement convexe,*
Alors on a l'égalité suivante :

$$\sup_{\pi\in\tilde{\mathcal{A}}} \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi - B)) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi - B)),$$

ce qui signifie que la solution du problème d'optimisation est la même que l'on restreigne l'ensemble des stratégies à $\tilde{\mathcal{A}}$ ou à $\mathcal{A}$.

6.3.2 Preuve des deux résultats

Réponse aux problèmes posés

Dans ce paragraphe, on explique comment répondre aux problématiques (a) et (b) soulevées, une fois la preuve des résultats énoncés établie.

Afin de répondre à la première question posée, à savoir (a), on doit à nouveau se restreindre à des stratégies appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$. La condition d'uniforme intégrabilité requise pour être dans $\mathcal{A}$ est, d'après la définition 6.1, automatiquement remplie dans le cas compact, ce qui n'est plus le cas lorsque $\mathcal{C}$ n'est plus compact. Cette condition assure en particulier que la propriété de surmartingale imposée par la méthode dynamique pour l'ensemble des processus R^π est vérifiée.

Dans un second temps et pour satisfaire l'exigence de la seconde assertion (b), nous nous référons au lemme 6.3 pour justifier que toute stratégie optimale (a priori seulement dans $\tilde{\mathcal{A}}$) est dans $\mathcal{A}$, i.e. qu'elle satisfait la condition d'uniforme intégrabilité. La preuve de ce résultat s'inspire fortement de travaux très récents dont le contexte est toutefois un peu différent. Le marché financier considéré est construit sur un espace muni d'une filtration brownienne et le processus de prix est dirigé par un brownien et donné par l'EDS

$$\frac{dS_s}{S_s} = \sigma_s(dW_s + \theta_s ds).$$

Toutefois, certaines hypothèses sont un plus générales :

- Le processus θ (risque premium) est supposé tel que : $\theta \in \mathrm{BMO}(W)$. (et non pas simplement borné),

- la condition terminale B n'est plus bornée mais possède un moment exponentiel approprié : ceci permet l'obtention d'estimations a priori appropriées et l'existence (ces résultats sont démontrés dans [BRI06]).

Preuve du théorème 6.2

Supposant acquis le résultat du lemme 6.3, on établit les deux assertions du théorème. La première assertion résulte à nouveau de l'emploi de la méthode dynamique (MD) en se restreignant toutefois à l'ensemble des stratégies appartenant à $\mathcal{A}$. Cette partie de la démonstration consiste à traduire et justifier la condition du surmartingale pour le processus $R^\pi := U_\alpha(X^\pi - Y))$. On ne la redonne pas, car elle est analogue au cas borné. Cette partie de la preuve permet d'en déduire l'EDSR qui est satisfaite par un triplet (Y, Z, U) dont l'existence est justifiée dans la section 5.4 dédiée au cadre non compact, avec le processus Y défini sur $S^\infty(\mathbb{R})$. En particulier, on a montré

$$\forall\, \pi \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{E}(R_T^\pi) \leq R_0 = -\exp(-\alpha(x - Y_0)).$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver l'existence d'une stratégie qui réalise l'égalité. On considère alors une sélection prévisible d'un processus π^* satisfaisant la relation (4.4) (l'existence est assurée par le lemme 6.2). D'après les calculs effectués à l'aide de la formule d'Itô dans la section 6.2, on justifie l'écriture suivante du processus R^{π^*}

$$\forall\, s,\ 0 \leq s \leq T, \quad R_s^{\pi^*} = R_0^{\pi^*} \mathcal{E}_s(\tilde{M}^{\pi^*}),$$

où l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\tilde{M}^{\pi^*})$ est une surmartingale positive (et où $R_0^{\pi^*}$ est une variable $\mathcal{F}_0$-mesurable négative). Le processus $-R^{\pi^*}$ est donc une surmartingale positive, ce qui se traduit encore par

$$\mathbb{E}(-R_T^{\pi^*}) := \mathbb{E}(\exp(-\alpha X_T^{\pi^*})\exp(\alpha B)) \leq -R_0^{\pi^*} = -\exp(-\alpha(x - Y_0)). \tag{6.13}$$

Du fait de l'appartenance du processus Y à $S^\infty(\mathbb{R})$, on obtient alors : $\mathbb{E}(\exp(-\alpha X_T^{\pi^*})) < \infty$: i.e. $\pi^* \in \tilde{\mathcal{A}}$. En particulier il en résulte

$$\mathbb{E}(R_T^{\pi^*}) \leq \sup_{\pi \in \tilde{\mathcal{A}}}(\mathbb{E}(R_T^\pi)) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}}(\mathbb{E}(R_T^\pi)),$$

où la dernière inégalité provient du lemme 6.3 donnant l'égalité des problèmes d'optimisation sur $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$.

D'une part, on obtient ainsi l'expression de la fonction valeur à la date $t = 0$, à savoir $V_0^B(x) = -\exp(-\alpha(x - Y_0))$, et d'autre part, il résulte de l'égalité suivante : $\mathbb{E}(R_T^{\pi^*}) = V_0^B(x) = R_0$, la condition d'optimalité souhaitée, à savoir : le processus R^{π^*} est une martingale de classe (D). On peut donc conclure que la famille

$$\{\exp(-\alpha X_\tau^{\pi^*}), \tau \;\; \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\}$$

est uniformément intégrable, ce qui implique : $\pi^* \in \mathcal{A}$ (π^* est donc admissible au sens de la définition 0.3).

$\square$

Preuve du Lemme 6.3

Afin de simplifier le problème à résoudre, on note que l'inclusion suivante est vérifiée : $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, de sorte qu'on a la relation suivante :

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi - B)) \leq \sup_{\pi \in \tilde{\mathcal{A}}} \mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi - B)).$$

Il s'agit désormais de justifier l'autre inégalité et, pour ce faire, l'idée consiste à considérer une stratégie π telle que : $\pi \in \tilde{\mathcal{A}}$ et à construire une suite (π^m) de stratégies qui appartiennent à la classe $\mathcal{A}$ et telles que :

$$\mathbb{E}\big(U_\alpha(X_T^{\pi^m} - B)\big) \to \mathbb{E}\big(U_\alpha(X_T^\pi - B)\big), \quad \text{lorsque } m \to \infty.$$

Sous l'hypothèse que $\pi \in \tilde{\mathcal{A}}$, on a en particulier la condition d'intégrabilité suivante :

$$\mathbb{E}(U_\alpha(X_T^\pi)) < \infty,$$

ce qui implique que la suite (τ^m) de temps d'arrêt :

$$\tau^m = \inf\{t \in [0, T],\ e^{-\alpha X_t^\pi} \geq m\} \wedge T,$$

est bien définie et converge vers T (au sens presque sûre). Cette suite satisfait la propriété

$$\forall\, \omega,\ \exists\, N(\omega),\ \text{t.q.}\ \forall\, m \geq N(\omega),\ \ \tau^m(\omega) = T.$$

On souhaite établir la convergence suivante

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(|\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}|\mathcal{F}_{\tau^m}) - e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}|^2\Big) \to 0, \quad \text{lorsque m } \to \infty. \tag{6.14}$$

Afin de simplifier l'écriture, on note $Y = e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}$. Comme, par hypothèse, π appartient à $\tilde{\mathcal{A}}$, la variable Y est dans $L^2(\mathbb{P})$ et il en est de même de la densité de la mesure équivalente $\mathbb{Q}^\theta$ (à savoir $\mathcal{E}_T(-\theta \cdot W)$). Le produit $Y\mathcal{E}_T(-\theta\cdot W)$ appartient à $L^1(\mathbb{P})$, ce qui entraine donc que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}|\mathcal{F}_{\tau^m})$ est une martingale bornée dans $L^1(\mathbb{Q}^\theta)$ pour tout m : le théorème de convergence des martingales appliqué à la suite $(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}|\mathcal{F}_{\tau^m}))$ entraine donc la convergence dans $L^1(\mathbb{Q}^\theta)$ et $\mathbb{Q}^\theta$-p.s. vers $e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}$ (et $\mathbb{P}$-p.s., du fait de l'équivalence entre les mesures). Pour conclure à la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$ en utilisant le théorème de Lebesgue, il faut assurer une condition de domination. Pour ce faire, on procède en introduisant la suite de variables tronquées $(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} \wedge p)_p$. On conclut à la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$ des trois termes suivants après passage à la limite en p

$$\begin{cases} Y - Y \wedge p & := \ e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} - e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} \wedge p \\ Y \wedge p - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(Y \wedge p|\mathcal{F}_{\tau_m}) & := \ e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} \wedge p - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}\Big(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} \wedge p)|\mathcal{F}_{\tau^m}\Big) \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(Y - Y \wedge p|\mathcal{F}_{\tau_m}) & := \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}\Big((e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} - e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi} \wedge p)|\mathcal{F}_{\tau^m}\Big), \end{cases}$$

et le résultat de convergence énoncé par (6.14) s'ensuit. D'autre part, puisque $\pi \in \tilde{\mathcal{A}}$, X^π est une $\mathbb{Q}^\theta$-martingale. D'après l'inégalité de Jensen, $e^{-\frac{\alpha}{2}X^\pi}$ est une sous martingale positive et de ce fait, on obtient :

$$e^{-\frac{\alpha}{2}X_{\tau^m}^\pi} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}(e^{-\frac{\alpha}{2}X_T^\pi}|\mathcal{F}_{\tau^m}).$$

Ce contrôle entraine que la suite $(e^{-\frac{\alpha}{2}X_{\tau^m}^\pi})$ est à valeurs dans $L^2(\mathbb{P})$. On obtient donc l'uniforme intégrabilité de la famille $(e^{-\alpha X_{\tau^m}^\pi})$ ainsi que celle de la famille $(U_\alpha(X_T^{\pi^m} - F))$, en définissant la suite (π^m) par :

$$\pi^m = \pi \mathbf{1}_{t \leq \tau^m}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver le résultat de convergence recherché par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue.
D'une part, on a justifié l'existence d'une suite de stratégie (notée (π^m)) telle que $\{U_\alpha(X_\tau^{\pi^m} - B),\ \tau\ \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt}\}$ est une famille uniformément intégrable et, d'autre part, la convergence simple de $(X_{\tau^m}^\pi)_m$ vers X_T^π est assurée par le fait que la suite (τ^m) converge $\mathbb{P}$ p.s vers T. (cette dernière hypothèse sur la suite (τ^m) est essentielle afin de pouvoir conclure puisque

les trajectoires du processus $(X^{\pi}_{t\wedge\tau^m})$ ne sont pas continues mais seulement càdlag).
On peut donc appliquer le théorème invoqué ci-dessus à la suite $(U_\alpha(X^{\pi}_{\tau^m} - B))$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}(U_\alpha(X^{\pi}_{\tau^m} - B)) = \mathbb{E}(U_\alpha(X^{\pi^m}_{T} - B)) \to \mathbb{E}(U_\alpha(X^{\pi}_{T} - B)),$$

dont il résulte l'inégalité recherchée suivante :

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(U_\alpha(X^{\pi}_{T} - B)) = \sup_{\pi\in\tilde{\mathcal{A}}} \mathbb{E}(U_\alpha(X^{\pi}_{T} - B)).$$

$\square$

Chapitre 7

Conclusion

Dans cette thèse, j'ai établi des résultats (d'existence et d'unicité) pour des EDSR de type quadratique dans des modèles où les filtrations considérées ne sont pas des filtrations browniennes. Plus précisément, on redonne ci-dessous la description des deux filtrations dans lesquelles l'étude a été menée :

1. Cadre d'une filtration continue sur laquelle est définie une martingale (locale) continue M
2. Cadre d'une filtration discontinue particulière (associée à un espace de Wiener-Poisson).

L'un des intérêts majeurs de la théorie des EDSR non linéaires est le lien entre ces dernières et certains problèmes de mathématiques financières : l'étude conduite permet de résoudre le problème d'optimisation de portefeuilles sous contraintes dans deux types de modèle. Ainsi, en complément de l'étude théorique menée dans chacune des deux grandes parties de cette thèse, on considère le problème de maximisation de l'utilité (très majoritairement l'utilité considérée est l'utilité exponentielle) : cette étude consiste en la description précise du marché financier ainsi que des hypothèses à prendre. Dans chacune des deux parties, on raffine progressivement les hypothèses sur les modèles : dans la première partie, on élargit les résultats au contexte d'un actif contingent non borné et, dans une dernière section, on donne une application à la notion de prix d'indifférence. Dans la seconde partie de la thèse, on s'affranchit successivement des hypothèses de finitude de la mesure de Lévy puis de l'hypothèse de compacité de l'ensemble de contraintes.

De nouvelles perspectives de recherche apparaissent : l'étude de la notion de prix d'indifférence faite dans la dernière section est restreinte à un cadre simplifié.

On peut aussi penser à étudier le problème d'optimisation sous contraintes dans les modèles suivants

- modèles exponentiels de Lévy,
- modèles à volatilité stochastique,

et l'un des avantages de ces modèles particuliers est le fait de pouvoir avoir des calculs plus explicites (expression explicites des densités de martingale à l'aide des paramètres de Girsanov, caractéristiques et expression explicite de la mesure de Lévy. Dans le cadre discontinu, on pourrait également envisager de voir les résultats qui restent vrais si l'on suppose que le processus θ (auquel on associe la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^\theta$) est seulement dans l'espace BMO(W) (W représente le mouvement brownien de l'espace de Wiener Poisson étudié).

Index des notationsles plus utilisées

. $Z \cdot W$ désigne l'intégrale stochastique par rapport à W.

. ZdW désigne la forme différentielle de l'intégrale stochastique $Z \cdot W$.

. S^∞ espace des processus Y satisfaisant : $\operatorname*{esssup}_{t,\omega} |Y_t| < \infty$
(La notation employée pour le supremum essentiel d'une variable (ou d'un processus) est celle de [DEL80])

. $S^2(\mathbb{R})$ regroupe l'ensemble des processus réels adaptés et càdlag $Y := (Y_t)_{t\in[0,T]}$ satisfaisant
$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2) < \infty$.

. $L^2(W)$ désigne l'ensemble des processus prévisibles Z et tels que
$\mathbb{E}\big(\int_0^T |Z_s|^2 ds\big) < \infty$.

. $\mathrm{BMO}(W)$ désigne l'ensemble des processus tels que l'intégrale stochastique $Z \cdot W$ soit une martingale BMO.

. $\mathcal{E}(M)$ désigne l'exponentielle stochastique d'une martingale locale M (telle que $M_0 = 0$)

. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$.

. $\langle M \rangle$ désigne la variation quadratique dans le cas M continue (ou le compensateur prévisible dans le cas M discontinue) d'une martingale localement de carré intégrable (ou plus généralement d'une semimartingale)

. $[M]$ désigne le crochet droit d'une martingale locale M (qui diffère de la variation quadratique $\langle M \rangle$ si M est discontinue). On suit ici les notations de [DEL80].

Bibliographie

[ANS] Ansel, J.-P. and Stricker, C., *Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **28**(3) : 375–392, 1992.

[BAR05] Barrieu, P. and El Karoui, N., *Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer*, *Finance Stoch.*, **9**(2), : 269–298, 2005.

[BARL97a] Barles, G., Buckdahn, R. and Pardoux, E., *Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations*, *Stoch. Stoch. Rep.*, **60** : 57–83, 1997.

[BARL97b] Barles,G. and Lesigne,E. *SDE, BSDE and PDE Backward stochastic differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser.* : 47–80, 1997.

[BEC06] Becherer, D., *Bounded solutions to Backward SDE's with jumps for utility optimization and indifference hedging*, *Ann. Appl. Probab.*, **16**(4) : 2027–2054, 2006.

[BEC04] Becherer, D., *Utility-indifference hedging and valuation via reaction-diffusion systems*, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **460** : 27–51, 2004.

[BEN05] Benth, F.E. and Meyer-Brandis, T., *The density process of the minimal entropy martingale measure in a stochastic volatility model with jumps*, *Finance Stoch.*, **9**(4) : 563–575, 2005.

[BIA05] Biagini, S. and Frittelli, M., *Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes*, *Finance Stoch.*, **9**(4) : 493–517, 2005.

[BIE] Bielecki, T.R., Jeanblanc, M. and Rutkowski, M., *Hedging of defaultable claims, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, *Lecture Notes in Math.*, **1847** : 1–132, Springer, Berlin, 2004.

[BIS] Bismut, J.-M., *Théorie probabiliste du contrôle des diffusions*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **4**(167), 1976.

[BOB] Bobrovnytska, O. and Schweizer, M., *Mean-variance hedging and stochastic control : beyond the Brownian setting*, *IEEE Trans. Automatic Control*, **49**(3) : 396–408, 2004.

[BRI00] Briand, P., Coquet, F., Hu, Y., Mémin, J. and Peng, S., *A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectation*, *Electron. Comm. Probab.*, **5** : 101–117, 2000.

[BRI03] Briand, P., Delyon, B., Hu, Y., Pardoux, E. and Stoica, L., *L^p solutions of backward stochastic differential equations*, *Stochastic Process. Appl.*, **108**(1) : 109–129, 2003.

[BRI06] Briand, P. and Hu, Y., *BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value*, *Probab. Theory Related Fields*, **136**(4) : 604–618, 2006.

[CHO] Chouilli, T. and Stricker, C. *More on minimal entropy-hellinger martingale measure*, *Math. Finance*, **16**(1) : 1–19, 2006.

[CON] Cont, R. and Tankov, P., *Financial Modelling with Jump Processes*, *Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series*, 2004.

[CVI93] Cvitanić, J. and Karatzas, I., *Hedging contingent claims with constrained portfolios*, *Ann. Appl. Probab.*, **3**(3) : 652–681, 1993.

[CVI01] Cvitanić, J., Schachermayer, W. and Wang, H., *Utility maximization in incomplete markets with random endowment*, *Finance Stoch.*, **5**(2) : 259–272, 2001.

[DEL95] Delbaen, F. and Schachermayer, W., *The existence of absolutely continuous local martingale measures*, *Ann. Appl. Probab.*, **5**(4) : 926–945, 1995.

[DEL94a] Delbaen, F. and Schachermayer, W., *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, *Math. Ann.*, **300**(3) : 463–520, 1994.

[DEL94b] Delbaen, F., Monat, P., Schachermayer, W., Schweizer, M. and Stricker, C. *Inégalités de normes avec poids et fermeture d'un espace d'intégrales stochastiques*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**(10) : 1079–1081, 1994

[DEL97] Delbaen, F., Monat, P., Schachermayer, W., Schweizer, M. and Stricker, C. *Weighted norm inequalities and hedging in incomplete market*, *Finance Stoch.* , **1**(3) : 181–227, 1997.

[DEL80] Dellacherie, C. and Meyer, P.-A. *Probabilités et Potentiel. Théorie des martingales. Chapitres V à VIII*, Hermann, 1980.

[DOL] Doléans-Dade, C. and Meyer, P.-A. *Inégalités de normes avec poids*, *Lecture Notes in Math.*, **721** : 313–331, Springer, Berlin, 1979.

[ELK97a] El Karoui, N. and Huang, S.-J., *A general result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations*, *Backward stochastic differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser.*,**364** : 27–36, 1997.

[ELK97b] El Karoui ,N and Mazliack, L. *Backward stochastic differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser.* , Longman, Harlow, 1997.

[ELK97c] El Karoui, N., Peng, S. and Quenez, M.C., *Backward stochastic differential equations in finance*, *Math. Finance*, **7**(1) : 1–71, 1997.

[ELK00] El Karoui, N. and Rouge, R., *Pricing via utility maximization and entropy*, *Math. Finance*, **10**(2) : 259–276, 2000.

[ELK01] El Karoui, N., Peng, S. and Quenez, M. C., *A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints*, *Ann. Appl. Probab.*, **11**(3) : 664–693, 2001.

[FOL] Föllmer, H. and Schied, A., *An Introduction in Discrete Time Stochastic Finance*, *de Gruyter Studies in Mathematics Berlin*, 2002.

[FUH] Fuhrman, M., Hu, Y. and Tessitore, G., *On a class of stochastic optimal control problems related to BSDEs with quadratic growth*, *SIAM J. Control Optim.*, **45**(4) : 1279–1296, 2006.

[HAM] Hamadène, S. and Ouknine, Y., *Reflected Backward Stochastic differential equations with jumps and random obstacle*, *Elect. Journal on Probab.* **8**(2) : 1–20, 2003.

[HAR] Harraj, N., Ouknine, Y. and Turpin, I., *Double-barriers–reflected BSDEs with jumps and viscosity solutions of parabolic integrodifferential PDEs*, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, **1** : 37–53, 2005.

[HUG] Hugonnier, J., Kramkov, D. and Schachermayer, W., *On utility-based pricing of contingent claims in incomplete markets*, *Math. Finance*, **15**(2) : 203–212, 2005.

[HU05] Hu, Y., Imkeller, P. and Müller, M., *Utility maximization in incomplete markets*, *Ann. Appl. Probab.*, **15**(3) : 1691–1712, 2005.

[IKE] Ikeda, N. and Watanabe, S., *Stochastic differential equations and diffusion processes*, *North-Holland Publishing Co.*, Amsterdam, 1989.

[JAC] Jacod, J. and Shiryaev, A.N., *Limit theorems for stochastic processes*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, **288**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[KAZ] Kazamaki, N., *A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales*, *Math. Rep. Toyama Univ.*, **2** : 1–11, 1979.

[KOB] Kobylanski, M., *Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth*, *Ann. Probab.*, **28**(2) : 558–602, 2000.

[LEP98] Lepeltier, J. P., and San Martin, J., *Existence for BSDE with superlinear-quadratic coefficient*, *Stochastics Stochastics Rep.*, **63**(3-4) : 227–240, 1998.

[LEP04] Lepeltier, J. P. and San Martin, J., *Backward SDEs with two barriers and continuous coefficient : an existence result*, *J. Appl. Probab.*, **41**(1) : 162–175, 2004.

[LEP05] Lepeltier, J.-P., Matoussi, A. and Xu, M., *Reflected backward stochastic differential equations under monotonicity and general increasing growth conditions*, *Adv. in Appl. Probab.*, **37**(1) : 134–159, 2005.

[LEP78] Lépingle, D. and Mémin, J., *Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles*, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **42**(3) : 175–203, 1978.

[MAN03] Mania, M., Santacroce, M. and Tevzadze, R., *A semimartingale BSDE related to the minimal entropy martingale measure*, *Finance Stoch.*, **7**(3) : 385–402, 2003.

[MAN05] Mania, M. and Schweizer, M., *Dynamic exponential utility indifference valuation*, *Ann. Appl. Probab.*, **15**(3) : 2113–2143, 2005.

[MAN06] Mania, M. and Tevzadze, R., *An exponential martingale equation* *Elect. Comm. in Probab.*, **11** : 206-216, 2006.

[MA94] Ma, J., Protter, P. and Yong, J.M., *Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme*, *Probab. Theory Related Fields*, **98**(3) : 339–359, 1994.

[MEY] Meyer, P. A., *Notes sur les intégrales stochastiques*, *Lecture Notes in Math.*, **581** : 446–475, Springer, Berlin, 1977.

[PAR90] Pardoux, É. and Peng, S., *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, *Systems Control Lett.* **14**(1) : 55–61, 1990.

[PAR92] Pardoux, É. and Peng, S., *Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations*, *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, **176** : 200–217, Springer, Berlin, 1992.

[PAR97a] Pardoux, É., *Generalized discontinuous backward stochastic differential equations*, *Backward stochastic differential equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **364** : 207-219, Longman, Harlow, 1997.

[PAR97b] Pardoux, E., *Generalized discontinuous backward stochastic differential equations*, *Backward stochastic differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser.* : 207–219, 1997.

[PAR99] Pardoux, É., *BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs*, *Nonlinear analysis, differential equations and control*, : 503–549, 1999.

[PRO] Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin, 2004.

[REV] Revuz, D. and Yor, M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, 1999.

[ROY03] Royer, M., *Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et Martingales non Linéaires*, PhD thesis, Université de Rennes 1, 2003.

[ROY04] Royer, M., *BSDEs with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with PDEs*, *Stoch. Stoch. Rep.*, **76**(4) : 281–307, 2004.

[ROY06] Royer, M., *Backward stochastic differential equations with jumps and related non-linear expectations*, *Stochastic Process. Appl.*, **116**(10) : 1358-1376, 2006.

[SCH] Schachermayer, W., *Utility maximization in incomplete markets*, *Lecture Notes in Math.*, **1856** : 255–293, Springer, Berlin, 2004.

[SCHW95] Schweizer, M., *On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition*, *Stochastic Anal. Appl.*, **13**(5) : 573–599, 1995.

[STRI85] Stricker, C., *Une remarque sur une certaine classe de semimartingales*, *Lecture Notes in Math.*, **1123** : 218–221, Springer, Berlin, 1985.

[STRI90] Stricker, C., *Arbitrage et lois de martingale*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **26**(3) : 451–460, 1990.

[STRI04] Stricker, C., *Indifference pricing with exponential utility*, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV*, **58** : 323–328, 2004.

[TUR] Turpin, I. *Sur l'interprétation probabiliste de solutions faibles d'EDPs : Contrôle Stochastique Optimal sous observations partielles et EDSRs*, PhD thesis, Université de Valenciennes, 2003.